This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

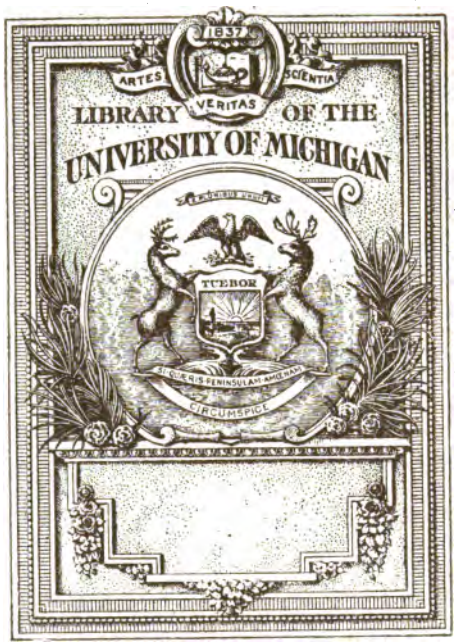
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QC
125
.R429t
1895

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

1912

Alexander Ziwet

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

COMPRENANT

LES LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR H. RESAL,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES MINES, MEMBRE DE L'INSTITUT.

DEUXIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE.

TOME DEUXIÈME.

Du mouvement des solides eu égard aux frottements. — Équilibre intérieur. — Élasticité. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

Alex. Ziwet
8-31-1922

AVANT-PROPOS.

Ce Volume se distingue de son correspondant de la première édition par des améliorations notables dont nous allons citer les principales.

Nous avons donné une interprétation plus nette des lois des frottements de glissement et de roulement. Nous avons augmenté notablement les applications des équations du mouvement des corps solides lorsqu'on fait intervenir, selon les cas, l'une ou l'autre de ces résistances.

Des simplifications importantes ont été apportées à l'étude de l'équilibre intérieur d'un solide quelle qu'en soit la nature.

Dans un Cours de Mécanique générale, l'exposition de la théorie mathématique de l'élasticité doit être limitée à ses points fondamentaux. Pour la première fois, nous avons donné les formules générales qui se rapportent aux dilatations et aux glissements. Nous avons traité complètement les questions relatives à la traction et à la compression des prismes. En ce qui concerne la torsion, nous avons cru devoir nous en tenir au cylindre circulaire, en renvoyant, pour les autres applications, à notre *Traité de Physique mathématique*.

Le calcul de la flexion d'un prisme n'a pu être effectué jusqu'à présent que dans un cas très particulier et pour un

406316

très petit nombre de formes de la section [1]; c'est pourquoi nous ne nous y sommes pas arrêté, en y substituant les principes de la théorie ordinaire de l'élasticité à laquelle on donne maintenant le nom de *résistance des matériaux;* en cela nous n'avons fait qu'imiter Poisson. Nous ne ferons que mentionner le calcul de la résistance des enveloppes cylindriques et sphériques. On n'est parvenu jusqu'ici à déterminer l'épaisseur d'une plaque dont les faces sont soumises à des pressions normales, qu'en faisant intervenir simultanément quelques formules de la théorie mathématique de l'élasticité et les hypothèses de la résistance des matériaux. Quoique cette méthode laisse à désirer au point de vue de la rigueur, nous avons cru devoir la faire connaître, parce qu'il nous paraîtrait difficile de l'introduire dans l'enseignement des écoles d'application. C'est pourquoi nous n'avons traité, dans le texte, et par un procédé spécial, que le cas d'une plaque circulaire soumise à des pressions constantes; nous avons consigné les généralités dans un Appendice placé à la fin du Volume et leur application aux plaques rectangulaires.

Le nombre des applications de l'Hydrostatique a été augmenté. L'Hydrodynamique et l'Hydraulique ont été complètement remaniées et simplifiées. Nous les avons fait suivre de l'étude des petits mouvements des fluides élastiques.

Nous n'avons pas reproduit la Thermodynamique, parce que nous n'avons rien à ajouter à ce qui se trouve dans notre *Traité de Physique mathématique,* t. II.

---

[1] *Voir* notre *Traité de Physique mathématique,* t. I.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

AVANT-PROPOS V

DEUXIÈME PARTIE.

DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS ET DE SES CAUSES (suite).

CHAPITRE X.

ACTIONS MUTUELLES DES CORPS SOLIDES NATURELS EN CONTACT.

§ I. — *Généralités.*

N^os
119 1

§ II. — *De la résistance au glissement.*

120. Frottement de glissement 2

§ III. — *De la résistance au roulement.*

121. Frottement de roulement 4

§ IV. — *Applications.*

122. Glissement d'un corps pesant sur un plan incliné 7
123. Roulement d'un cylindre circulaire pesant sur un plan incliné 7
124. Mouvement d'un pendule composé muni d'un tourillon qui roule sur deux parties d'un plan horizontal 8
125. Mouvement ascendant sur un plan incliné d'un cylindre pesant de révolution dont le centre de gravité, quoique situé dans la section moyenne, ne coïncide pas avec le centre de cette section 10
126. Mouvement ascendant d'un double cône pesant de révolution sur un plan incliné angulaire 13

Nos Pages
127. De la roulette enfantine..... 17
128. Glissement d'une sphère pesante sur un plan horizontal..... 19

§ V. — *De l'influence du frottement dans le choc de deux corps solides.*

129. Généralités..... 21
130. Choc de deux sphères composées de couches concentriques homogènes. 22

CHAPITRE XI.

DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR D'UN CORPS, QUELLE QU'EN SOIT LA NATURE.

131. Équations de l'équilibre intérieur en coordonnées rectilignes..... 27
132. Tétraèdre élémentaire..... 28
133. Directrice..... 29
134. Ellipsoïde des pressions..... 29
135. Détermination des pressions principales..... 30
136. Pression sur un élément perpendiculaire à un plan coordonné..... 30
137. Équations d'équilibre en coordonnées cylindriques..... 30

CHAPITRE XII.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ.

§ I. — *Généralités.*

138. Élasticité..... 34
139. Déformations d'un corps élastique sous l'action de forces extérieures. 34
140. Dilatations et glissements se rapportant à deux éléments rectangulaires perpendiculaires à un plan coordonné..... 38
141. Expressions des composantes des pressions en coordonnées rectangulaires..... 39
142. Expressions des pressions en coordonnées cylindriques..... 41
143. Expressions des pressions en coordonnées sphériques..... 43

§ II. — *De la traction et de la compression.*

144. Traction d'un prisme..... 45
145. Compression..... 47

§ III. — *De la torsion.*

146. Définition..... 48
147. Torsion d'un cylindre circulaire..... 48

§ IV. — *De la flexion.*

N°s Pages
148. Définition 49
149. Flexion transversale d'un prisme 50
150. Courbe élastique 52
151. Faibles flexions des prismes 53

§ V. — *Enveloppes cylindriques.*

152. Enveloppe soumise à une pression intérieure et à une pression extérieure 55

§ VI. — *Plaques circulaires.*

153. Plaque soumise sur chacune des deux faces à une pression uniforme. — Fonds plats des appareils à vapeur 58

§ VII. — *Enveloppes sphériques.*

154. Enveloppe soumise à des pressions uniformes sur ses surfaces limites 63

CHAPITRE XIII.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES (HYDROSTATIQUE).

155. Généralités 66
156. Des fluides pesants 68
157. Principe d'Archimède 69
158. Pression d'un liquide sur une paroi plane 69
159. Pression sur une paroi cylindrique 70
160. Liquide animé d'un mouvement de rotation autour d'une verticale 71
161. Liquide soumis à l'action du vent 72
162. Forme d'équilibre de la mer sous l'action du Soleil et de la Lune 73
163. Équilibre des corps flottants 77
164. Stabilité des corps flottants 83
165. Petites oscillations des corps flottants 86
166. Mesure des altitudes au moyen du baromètre 87

CHAPITRE XIV.

DU MOUVEMENT DES FLUIDES (HYDRODYNAMIQUE).

167. Équations générales du mouvement 89
168. Du mouvement permanent 93
169. Potentiel de la vitesse 94

Nos Pages
170. Équations du mouvement en coordonnées cylindriques..... 96
171. Remarque..... 100

CHAPITRE XV.

HYDRAULIQUE.

§ I. — *Questions diverses.*

172. Généralités..... 101
173. Écoulement par un orifice en mince paroi..... 102
174. Ajutage conique très court..... 104
175. Minimum du coefficient de contraction..... 105
176. Contraction incomplète..... 106
177. Ajutage divergent..... 107
178. Déversoir..... 108
179. De l'écoulement par une vanne..... 110
180. Mouvement varié dans un tuyau..... 110
181. Principe de Borda..... 114
182. Ajutage cylindrique..... 117

§ II. — *Du frottement d'un liquide dans un tuyau.*

183. Loi du frottement..... 119
184. Écoulement d'un réservoir dans un autre..... 121

§ III. — *De l'influence d'un coude dans un tuyau.*

185. Formule empirique..... 122

§ IV. — *Du mouvement d'un liquide dans un canal.*

186. Coefficient de correction..... 123
187. Formules générales..... 124
188. Condition pour que le mouvement soit uniforme..... 126
189. Relation entre la vitesse moyenne et la vitesse à la surface..... 126
190. Du mouvement varié..... 126
191. Ressauts d'élévation..... 131
192. Élargissements brusques..... 132
193. Description sommaire des procédés le plus généralement employés pour jauger un cours d'eau..... 133

§ V. — *De la pression exercée par un liquide en mouvement sur un corps solide fixe.*

194. Pression d'une veine fluide sur une plaque..... 136
195. Pression sur un solide de révolution..... 137

Nos Pages
196. Pression d'une masse fluide en mouvement sur un solide fixe immergé. 138
197. De l'influence des proues et des poupes..... 141
198. De la résistance éprouvée par un solide animé d'un mouvement translatoire dans un liquide en repos..... 141

§ VI. — *Écoulement permanent, par un orifice, d'un fluide élastique renfermé sous pression constante dans un réservoir.*

199-200. Gaz permanents..... 143
201. Vapeur d'eau saturée sèche..... 145
202. Frottement des gaz dans les tuyaux..... 145

CHAPITRE XVI.

DES PETITS MOUVEMENTS D'UN FLUIDE ÉLASTIQUE.

203. Équations générales..... 147
204. Mouvement d'un gaz dans un tuyau..... 148
205. Le tuyau est indéfini..... 150
206. Le tuyau est fermé à ses extrémités..... 151
207. Le tuyau est ouvert à ses deux extrémités..... 153
208. Une des extrémités est ouverte et l'autre est fermée..... 154
209. Petits mouvements d'un gaz indéfinis en tous sens..... 154

APPENDICE.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UNE PLAQUE DONT LES FACES SONT SOUMISES A DES PRESSIONS NORMALES.

I. Formules générales..... 157
II. Plaque circulaire..... 160
III. Plaque rectangulaire..... 162

ERRATA.

Page 95, 3e ligne en remontant, *au lieu de* $\frac{d}{z}$ *lire* $\frac{d}{2}$.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

DEUXIÈME PARTIE.

DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS ET DE SES CAUSES

(SUITE).

CHAPITRE X.

DES ACTIONS MUTUELLES DES CORPS SOLIDES NATURELS EN CONTACT.

§ I. — Généralités.

119. Dans les Chapitres précédents, nous avons supposé que les corps solides, en réagissant les uns sur les autres, se comportaient comme s'ils étaient invariables de forme ou absolument durs, sans présenter d'aspérités à leurs surfaces, ce qui nous a conduit à considérer les résultantes de leurs actions mutuelles au contact comme étant dirigées suivant leur normale commune.

Mais, en réalité, il n'en est pas ainsi, en raison de la constitution physique des solides. Les corps en contact se déprimment mutuellement d'une manière permanente ou passagère selon l'énergie de leur compression réciproque; les dépressions atteignent leur maximum lorsqu'il y a tendance au mouvement relatif d'un corps par rapport à un autre avec lequel il est en contact.

Comme conséquence des déformations, la résultante des actions mutuelles des deux corps n'est pas normale à leur surface et ne passe pas rigoureusement par leur point de contact géométrique quand leurs surfaces affectent des formes telles qu'elles puissent être considérées comme se touchant en un seul point. Cette résultante se décompose en deux forces, l'une normale et l'autre tangentielle.

§ II. — De la résistance au glissement.

120. Considérons deux solides (S), (S′) qui, sous l'action de forces extérieures, tendent à glisser l'un sur l'autre suivant une aire de contact plus ou moins étendue.

On a été conduit par l'expérience à poser en principe que la réaction tangentielle $T d\omega$ de (S′) sur (S) en chaque élément $d\omega$ de la surface de contact est proportionnelle à la réaction normale correspondante $N d\omega$ et est dirigée en sens inverse de la vitesse relative en $d\omega$ de (S) par rapport à (S′).

Le rapport

$$\frac{T}{N} = f$$

dépend de la nature des corps en contact du poli de leurs surfaces et de la manière dont elles ont été lubréfiées [1].

On a donné respectivement à $T d\omega = N f d\omega$ et à f les noms de *frottement de glissement élémentaire* et de *coefficient de frottement.*

Soient $R d\omega$ la réaction totale de (S′) sur (S); α l'angle, dit *de frottement,* de sa direction avec la normale; on a les relations

$$\tang \alpha = f,$$

$$N = R \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{1+f^2}},$$

$$T = R \sin \alpha = \frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}.$$

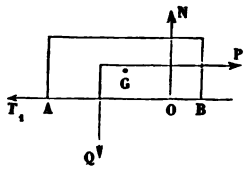
---

[1] L'emploi des huiles et graisses a pour effet de combler les vides entre les saillies moléculaires; par suite, de rendre les surfaces à peu près uniformes et à diminuer f.

Il ne faut pas perdre de vue que la réaction de (S) sur l'élément $d\omega$ de (S′) est égale et contraire à $R d\omega$.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'un prisme rectangulaire pesant (S), reposant par une de ses surfaces AB (*fig.* 48) sur un plan horizontal.

Fig. 48.



Soient Q le poids du prisme; P une force horizontale extérieure comprise dans le plan vertical passant par le centre de gravité G de (S), parallèle à deux des côtés AB de la face de contact. La direction de P est complètement déterminée, mais on peut faire croître son intensité à partir de zéro. Quoi qu'il en soit, la réaction verticale totale N de (S′) sur (S) sera égale et contraire à Q.

Le prisme étant d'abord un repos pour $P = o$, faisons croître l'intensité de cette force; le prisme restera encore en repos jusqu'au moment où l'on aura $P = Nf$, et alors il y aura tendance au glissement de (S) sur (S′), d'où l'on doit conclure que *toute composante tangentielle élémentaire* $T d\omega$ *a pour maximum le frottement de glissement* $fN d\omega$.

La force P continuant à croître, (S) se mettra en mouvement sous l'action de cette force et de fQ [1], mais nous n'insisterons pas sur ce point qui sera élucidé par les exemples que nous donnerons plus loin.

Si nous revenons au cas général de deux solides quelconques (S), (S′) et si nous désignons par $d\sigma$ le déplacement élémentaire relatif des éléments $d\omega$ des surfaces de ces deux corps, le travail élémentaire de $Nf d\omega$ pour tout le système sera $-Nf d\omega d\sigma$.

---

[1] C'est dans ces conditions qu'Amontons (1663-1705) découvrit les lois du frottement, confirmées après lui par Coulomb (vers 1780) et par Morin.

Pour donner une idée de l'importance du frottement, nous indiquerons les moyennes suivantes, en renvoyant aux Aide-Mémoire pour plus de détails [1] :

	État des surfaces.	f.
Bois sur bois	à sec	0,45
	humide	0,25
	graisse renouvelée	0,07
Bois sur métal	à sec	0,36
	humide	0,24
	graisse renouvelée	0,07
Métal sur métal	à sec	0,18
	graisse renouvelée	0,08
Cuir sur bois	à sec	0,32
	humide	0,29
Cuir sur métal	à sec	0,56
	humide	0,36
Corde de chanvre sur bois		0,50

§ III. — De la résistance au roulement.

121. Considérons un cylindre circulaire homogène plein ou creux, reposant sur un plan horizontal.

Soient (*fig.* 49) O le centre et A le point de contact avec le plan de la section moyenne; $R = \overline{OA}$ le rayon et Q le poids du cylindre.

Pour faire rouler le cylindre d'un mouvement uniforme sur le plan, il faudra le soumettre à l'action d'une force F comprise dans la section moyenne; la résultante de F et Q passera en un point A_1 de la circonférence très voisin de A et sera détruit par la réaction du plan.

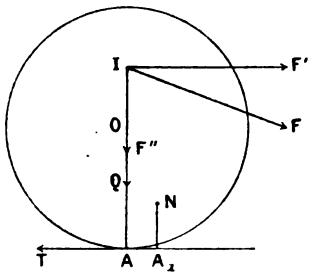
Soient

I l'intersection des directions de F et de AO;
$a = \overline{IA}$;

[1] Le plus apprécié est celui de Claudel (t. I).

F′, F″ les composantes horizontale et verticale de F;
T, N les composantes semblables de la réaction du plan;
$\delta = \overline{AA_1}$.

Fig. 49.



On a d'abord

$$(1) \qquad N = F'' + Q, \qquad T = F'$$

et, en prenant les moments par rapport au point A,

$$(2) \qquad F'a = \delta . N = \delta (F'' + Q).$$

On donne improprement à la longueur δ le nom de *coefficient de frottement de roulement* au lieu de : *bras de levier du moment ou du couple qui résiste au roulement.* Néanmoins, pour abréger, nous accepterons pour δ la dénomination admise.

Si f est le coefficient du frottement de glissement de la matière du cylindre sur celle du plan, pour qu'il y ait roulement et non glissement, il faut que $T < Nf$ ou

$$(3) \qquad a > \frac{\delta}{f}.$$

Cas particuliers. — 1° La force F agit horizontalement au sommet du cylindre. On a $F'' = 0$, $F' = F$, $a = 2R$ et

$$(4) \qquad F = \frac{Q\delta}{2R};$$

c'est en se plaçant dans ce cas qu'on a déterminé expérimentalement δ.

D'après Coulomb et Morin, δ serait indépendant de R, ce

qui paraît invraisemblable, car une aiguille d'un rayon inférieur à δ ne pourrait pas rouler sur le plan.

D'après Dupuit, on aurait, en désignant par K une constante, $\delta = K\sqrt{R}$; mais alors la longueur δ serait très grande pour R très grand, tandis qu'elle atteint au plus quelques centimètres.

Le désaccord peut aisément s'expliquer; Coulomb et Morin ont opéré sur des cylindres dont les rayons étaient grands et peu différents les uns des autres, tandis que Dupuit ne s'est servi que de cylindres de faibles diamètres.

Il nous semble qu'on pourrait tout concilier en prenant

$$\delta = \mu\sqrt{\frac{R}{R+n}},$$

formule dans laquelle μ et n seraient deux constantes à déterminer expérimentalement; car, pour R très grand, on aurait $\delta = \mu$ et, pour R suffisamment petit, $\delta = \frac{\mu}{\sqrt{n}}\sqrt{R}$. En partant des résultats obtenus par Morin et Dupuit, on aurait

$$\mu = 0^m,0007, \quad n = 1^m, \quad \text{pour fer sur fer,}$$
$$\mu = 0^m,0016, \quad n = 2^m,116, \quad \text{pour bois sur bois.}$$

2° La force F est verticale et agit tangentiellement au cylindre. Comme on a $F' = 0$, $a = 0$, la formule (2) n'est pas applicable; mais on voit de suite que $FR = (F + Q)\delta$, d'où en négligeant $\frac{\delta}{R}$ devant l'unité

$$F = \frac{\delta}{R}Q, \tag{6}$$

valeur double de la valeur (4). Comme T est nul, il y aura toujours roulement.

Revenons à l'inégalité (3); en prenant, avec Morin, $\delta = 0^m,004$, $f = 0,2$, pour fer sur fer, on aurait $a > 0^m,02$.

L'inégalité (3) s'applique au mouvement d'une bille sur un tapis et l'on explique pourquoi, en prenant la bille suffisamment bas, elle glisse au lieu de rouler sur le tapis.

Si ω est la rotation instantanée du cylindre, le travail élé-

mentaire que l'on a à vaincre pour produire le roulement est $N\delta\omega dt$; c'est ce qu'il est facile de vérifier d'ailleurs en remarquant que la formule (2) donne $F'a\omega dt = N\delta\omega dt$, et que les travaux élémentaires de Q, F″, T sont nuls.

§ IV. — Applications [1].

122. *Glissement d'un corps pesant sur un plan incliné.* — Soient

M la masse du corps;
i l'inclinaison du plan incliné sur l'horizon;
F une force extérieure agissant dans le plan vertical passant par le centre de gravité et perpendiculaire à la base du plan;
β l'angle qu'elle forme avec le plan incliné.

Si, à l'instant initial, le corps est animé d'un mouvement de translation parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné, le mouvement, à un instant quelconque t, sera encore de translation, et nous désignerons par V la vitesse à cet instant.

Les composantes normale et tangentielle de la réaction du plan étant $N = Mg\cos i - F\sin\beta$, $T = fN$, nous avons

$$-M\frac{dV}{dt} + Mg\sin i + F\cos\beta - f(Mg\cos i - F\sin\beta) = 0.$$

On voit que, si F et β sont constants, le mouvement sera uniformément varié.

123. *Roulement d'un cylindre circulaire pesant sur un plan incliné.* — Le cylindre est censé homogène ou composé de couches cylindriques homogènes. Il peut être plein ou évidé; ses génératrices doivent naturellement rester parallèles à la trace horizontale du plan, et il suffit qu'il en soit ainsi à l'instant initial.

---

[1] Les questions que nous allons traiter sont étrangères à celles qui se rapportent aux machines et pour lesquelles nous renverrons au Tome III, Chap. IV.

Soient

M, R la masse et le rayon extérieur du cylindre;
$M\gamma^2$ son moment d'inertie par rapport à son axe;
i l'inclinaison du plan incliné sur l'horizon;
δ le coefficient de frottement de roulement;
ω la rotation instantanée du cylindre à l'instant t.

La vitesse du centre de gravité du cylindre étant $R\omega$, la force vive du mobile, d'après le théorème de Kœnig, est $M(\gamma^2+R^2)\omega^2$; en remarquant que la réaction normale du plan incliné est $Mg\cos i$, on a

$$\frac{M}{2}(\gamma^2+R^2)\,d\omega^2 = Mg\sin i\,\omega R\,dt - Mg\cos i\,\delta,\omega\,dt,$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g(R\sin i - \delta\cos i)}{\gamma^2+R^2}.$$

La réaction tangentielle a pour valeur

$$Mg\sin i - MR\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mg}{\gamma^2+R^2}(\gamma^2\sin i + R\,\delta\cos i),$$

et en exprimant qu'elle doit être plus petite que le frottement de glissement fMg, on trouve

$$\operatorname{tang} i < f + \frac{R(fR-\delta)}{\gamma^2}.$$

Si cette condition n'est pas remplie, le cylindre glissera et l'on retombera sur un cas particulier du problème précédent.

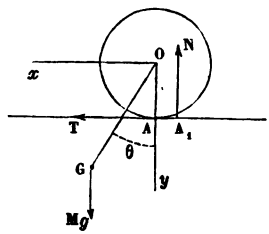
124. *Mouvement d'un pendule composé muni d'un tourillon qui roule sur deux parties d'un plan horizontal.* — Nous prendrons (*fig.* 50) pour plan de la figure le plan moyen perpendiculaire à l'axe O de rotation.

Soient

r le rayon du tourillon;
G le centre de gravité du pendule;
$l = \overline{GO}$;
M la masse du pendule et $M\gamma^2$ son moment d'inertie par rapport à la parallèle en G à l'axe O;

Oy, Ox la verticale et l'horizontale du point O;
θ l'angle GOy;
N, T les composantes normale et tangentielle de la réaction du plan sur le tourillon;
ω la rotation instantanée du tourillon autour du point de contact A dont le sens est de la gauche vers la droite;
$AA_1 = \delta$ le coefficient de frottement de roulement.

Fig. 50.



La rotation ω transportée en O donne la translation $-\omega r$ suivant Ox et l'on voit que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, et que le carré de la vitesse de G est

$$(-\omega r + l\omega\cos\theta)^2 + l^2\omega^2\sin^2\theta = \omega^2(r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta).$$

On a, de plus,

$$N = Mg + Ml\frac{d}{dt}\omega\sin\theta = M\left(g + l\frac{d\omega}{dt}\sin\theta + l\omega^2\cos\theta\right).$$

L'équation des forces vives donne

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{M}{2}d\omega^2(\gamma^2 + r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta) \\ &\quad = -Mgl\sin\theta\omega\,dt - M\left(g + l\frac{d\omega}{dt}\sin\theta + l\omega^2\cos\theta\right)\delta\omega\,dt, \end{aligned}\right.$$

ou

$$\frac{d\omega}{dt}(\gamma^2 + r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta + l\delta\sin\theta) + \omega^2 l\delta\cos\theta = -g(l\sin\theta + \delta),$$

et, en faisant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, on aura l'équation du mouvement.

Si l'on néglige δ [1], l'équation (1) s'intègre immédiatement en y faisant $dt = \frac{d\theta}{\omega}$, et l'on obtient, en désignant par $-\theta_0$ la valeur de θ à l'origine de l'oscillation considérée,

$$(2) \qquad (\gamma^2 + r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

ce qui est l'équation à laquelle Euler était arrivé avant qu'on eût des notions précises sur la résistance au roulement.

La durée d'une demi-oscillation est

$$\tau = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{\gamma^2 + r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta}{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\, d\theta.$$

Nous avons maintenant pour la réaction tangentielle du plan

$$T = -M\frac{d}{dt}(r\omega + l\omega\sin\theta).$$

Nous ne nous arrêterons pas à vérifier l'inégalité $T < Nf$, même dans le seul cas accessible au calcul où l'on néglige δ.

125. *Mouvement ascendant, sur un plan incliné, d'un cylindre pesant de révolution dont le centre de gravité* G, *quoique situé dans la section moyenne, ne coïncide pas avec le centre* C *de cette section* [2]. — Il peut y avoir roulement ou glissement; mais nous ne nous occuperons que du premier cas, qui seul présente quelque intérêt, sauf à établir ensuite la condition nécessaire pour qu'il puisse en être ainsi.

Le plan de la figure sera celui de la section moyenne et l'on négligera le coefficient du frottement de roulement.

Soient (*fig.* 51)

i l'inclinaison du plan incliné Ox sur l'horizon Ox', l'origine O étant le point de contact au départ où le cylindre était au repos;

A le point de contact à l'instant t;

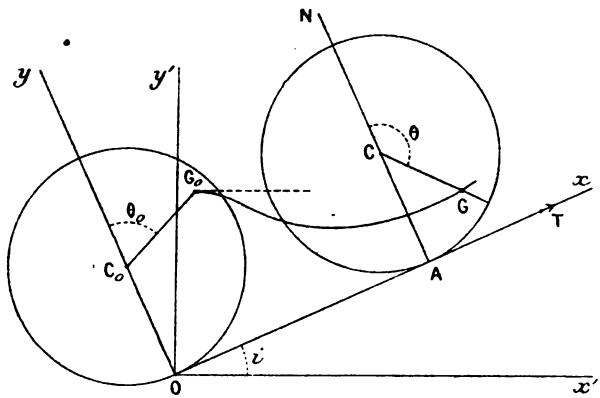
---

[1] Soit environ $0^m,002$ pour métal sur métal, les surfaces étant polies.

[2] Ce problème se trouve énoncé dans les *Récréations mathématiques et physiques* d'Ozanam; 1694.

$R = \overline{CA}$ le rayon du cylindre;
$a = \overline{CG}$;
θ l'angle de $\overline{CG}$ avec la normale $\overline{AN}$ à Ox;
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la rotation instantanée autour de A;
M, $M\gamma^2$ la masse du cylindre et son moment d'inertie par

Fig. 51.



rapport à l'axe projeté en G; x, y et x', y' les coordonnées de G relatives aux deux systèmes d'axes. L'indice o continuera à caractériser les éléments algébriques qui se rapportent à l'état initial.

Le carré de la vitesse de G étant

$$\omega^2\overline{GA}^2 = \omega^2(R^2 + a^2 + 2aR\cos\theta),$$

l'équation de la force vive donne

$$(1) \qquad \omega^2(\gamma^2 + R^2 + a^2 + 2aR\cos\theta) = 2g(y'_0 - y'),$$

et l'on voit que G décrira un arc de courbe limité par le point G_0 et un point G_1 situé sur l'horizontale du précédent.

Si l'on remarque que

$$\overline{OA} = R(\theta - \theta_0), \qquad x = R(\theta - \theta_0) + a\sin\theta, \qquad y = R + a\cos\theta,$$
$$y' = y\cos i + x\sin i = R[\cos i + (\theta - \theta_0)\sin i] + a\cos(\theta - i),$$

l'équation (1) devient

$$\begin{aligned}&\omega^2(\gamma^2+R^2+a^2+2aR\cos\theta)\\&\quad=2g\{-R(\theta-\theta_0)\sin i+a[\cos(\theta-i)-\cos(\theta_0-i)]\},\end{aligned}$$

d'où, par la différentiation,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\omega}{dt}(\rho^2+R^2+a^2+2a\cos\theta)-aR\sin\theta.\omega^2\\&\quad=g[-R\sin i+a\sin(\theta-i)].\end{aligned}\right.$$

Pour que le roulement commence à l'instant initial ($\omega=0$ pour $\theta=\theta_0$), il faut que $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0$ soit positif ou que

$$(3)\qquad \sin i<\frac{a}{R}\sin(\theta_0-i),$$

condition qu'on supposera remplie.

En désignant par V la vitesse $\omega\overline{AG}$ du centre de gravité G, nous avons successivement

$$V_x=\omega y=\omega(R+a\cos\theta)\qquad V_y=-\omega a\sin\theta,$$

$$\frac{dV_x}{dt}=(R+a\cos\theta)\frac{d\omega}{dt}-a\sin\theta.\omega^2,$$

$$\frac{dV_y}{dt}=-a\sin\theta\frac{d\omega}{dt}-a\cos\theta.\omega^2.$$

Soient N la réaction normale du plan incliné et T sa réaction tangentielle dont Ox sera le sens positif; nous avons

$$M(R+a\cos\theta)\frac{d\omega}{dt}-Ma\sin\theta.\omega^2=T-Mg\sin i,$$

$$-Ma\sin\theta\frac{d\omega}{dt}-Ma\cos\theta\,\omega^2=N-Mg\cos i,$$

d'où, à l'instant initial,

$$T_0=Mg\sin i+M(R+a\cos\theta_0)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0,$$

$$N_0=Mg\cos i-Ma\sin\theta_0\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0.$$

Pour qu'il y ait roulement à partir de l'instant initial, il

faut encore que l'on ait $T_0 < N_0 f$ ou

$$(4) \qquad (R + a\cos\theta_0 + f\sin\theta_0)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 < g(f\cos i - \sin i),$$

inégalité dans laquelle on devra substituer à $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0$ sa valeur déduite de l'équation (2). Mais, en supposant que les conditions (3) et (4) soient remplies, il pourra se produire un glissement peu après l'instant initial, et alors le mouvement s'arrêtera.

Comme curiosité, on pourrait examiner le cas où, i étant nul, l'angle θ_0 et le rapport $\frac{a}{R}$ sont petits.

126. *Mouvement ascendant d'un double cône pesant de révolution sur un plan incliné angulaire.* — Le plan est formé de deux règles dont les faces sont verticales et dont la jonction se trouve au point le plus bas. Les deux cônes sont identiques et sont réunis suivant leur base commune ou *équateur*. Si l'on pose le solide sur le plan incliné de manière que l'équateur coïncide avec le plan bissecteur vertical de l'angle des règles, il se met en mouvement sans que les deux derniers plans cessent de coïncider; l'axe du solide s'élève jusqu'au point où les sommets quittent les règles et où il y a chute. Ce paradoxe n'est qu'apparent, car si l'axe s'élève le centre de gravité s'abaisse.

La partie utile de chaque règle, qui sera pour nous une *directrice*, peut être censée réduite à une bande très étroite tangente à son cône.

Soient (*fig.* 52)

O, Ox le sommet du plan et la bissectrice de l'angle 2φ des règles;

Oy la normale au plan incliné xOz;

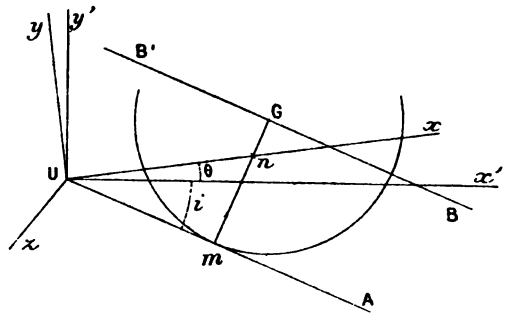
2γ, h l'angle de section méridienne et la hauteur de chaque cône;

x_1, y_1 les coordonnées du centre G de l'équateur;

θ l'inclinaison de Ox sur l'horizontale Ox', l'axe Oy' étant dirigé en sens inverse de la pesanteur;

l, m, n les angles avec Ox, Oy, Oz de la normale au point (x, y, z) du cône situé du côté des z positifs, cône qu'il nous suffit de considérer quant à présent.

Fig. 52.



L'équation du cône étant

$$(1) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z - h)^2 \operatorname{tang}^2\gamma,$$

on a

$$(2) \qquad \cos l = \frac{x_1 - x}{\Delta}, \qquad \cos m = \frac{y_1 - y}{\Delta}, \qquad \cos n = \frac{(h - z)\operatorname{tang}^2\gamma}{\Delta}.$$

De l'équation (1) et celles de la directrice,

$$(3) \qquad y = 0, \qquad z = x \operatorname{tang}\varphi,$$

on tire la suivante

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2(1 - \operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{tang}^2\gamma) \\ \quad - 2x(x_1 - h \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}^2\gamma) + y_1^2 + x_1^2 - h^2 \operatorname{tang}^2\gamma = 0. \end{array} \right.$$

En exprimant que ses racines sont égales, on trouve

$$(5) \qquad h - x_1 \operatorname{tang}\varphi = y_1 \sqrt{\cot^2\gamma - \operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que $90^\circ - \gamma > \varphi$, ce qu'on pouvait prévoir, car s'il en était autrement, le double cône viendrait, même en O, se loger entre les directrices.

En désignant par χ, ζ les valeurs de x, z pour le point de

contact, les équations (4), (5), (3) donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 - \chi = \dfrac{(h - x_1 \operatorname{tang}\varphi)\operatorname{tang}\varphi}{\cot^2\gamma - \operatorname{tang}^2\varphi}, \\ y_1 \qquad = \dfrac{h - x_1 \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{\cot^2\gamma - \operatorname{tang}^2\varphi}}, \\ h - \zeta = \dfrac{h - x_1 \operatorname{tang}\varphi}{\cot^2\gamma - \operatorname{tang}^2\varphi}. \end{cases}$$

Si λ, μ, ν désignent les valeurs de l, m, n pour le point de contact (χ, ζ), on a, par ce qui précède,

$$(7)\quad \cos\lambda = \operatorname{tang}\varphi \sin\lambda, \quad \cos\mu = \sqrt{\cot^2\gamma - \operatorname{tang}^2\varphi}, \quad \cos\nu = -\sin\gamma.$$

Comme les angles λ, μ, ν sont constants, le cône reste constamment tangent à un plan fixe (*directeur*) passant par sa directrice. La circonférence de l'équateur reste par suite tangente en m à l'intersection OA des deux plans directeurs et qui a pour équation

$$(8)\qquad x\cos\lambda + y\cos\mu = 0.$$

La seconde des équations (6), mise sous la forme

$$(9)\qquad x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu = h\sin\gamma,$$

montre que G décrit une droite B'B, parallèle à OA.

L'équation suivante, résultant des deux premières équations (6)

$$\frac{x_1 - \chi}{y_1} = \frac{\cos\lambda}{\cos\mu},$$

prouve que la droite qui joint les points de contact (χ, ζ), $(\chi, -\zeta)$ coupe Ox à l'intersection n de cet axe avec $\overline{mG}$.

Soient x, y et x', y' les coordonnées de m dans les deux systèmes d'axes coordonnés, i l'angle AOx. En substituant dans l'équation (8) les expressions

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta, \qquad y = y'\cos\theta - x'\sin\theta,$$

on trouve

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\sin\theta\cos\lambda + \cos\theta\sin\mu}{\cos\theta\cos\lambda - \sin\theta\cos\mu} = -\operatorname{tang} i.$$

Pour que le centre de gravité descende, il faut que $\tang i > 0$ ou

$$\tang \theta < \frac{\cos \lambda}{\cos \mu},$$

condition que nous devons supposer remplie.

Un élément superficiel de l'un des cônes, commun avec la directrice, ne peut pas, au bout du temps dt, venir coïncider avec un élément infiniment voisin de la directrice; de sorte qu'il ne peut pas y avoir de glissement. Mais, par contre, le roulement autour de l'axe dont n est la trace est compatible avec les conditions du système, puisque $\overline{B'B}$ est perpendiculaire à $\overline{Gn}$. En désignant par ω la rotation instantanée, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega y_1,$$

d'où, en remplaçant $\frac{dx_1}{dt}$ par sa valeur, en fonction de $\frac{dy_1}{dt}$, déduite de l'équation (9),

$$\omega = -\frac{\cos \mu}{\cos \lambda} \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dt}.$$

Si V désigne la vitesse de G, on a

$$V^2 = \frac{dy_1^2}{dt^2}\left(1 + \frac{\cos^2 \mu}{\cos^2 \lambda}\right) = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \lambda} \frac{dy_1^2}{dt^2}.$$

Soient

M la masse du solide;

$M\rho^2$ son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution;

y'_1 l'ordonnée de G parallèle à Oy', et $y'_{1,0}$ sa valeur quand le corps part du repos.

En négligeant le coefficient du frottement de roulement, l'équation de la force vive nous donne, en ayant égard à ce qui précède,

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} \frac{dy_1^2}{dt^2}\left(\frac{\rho^2}{y_1^2} \cos^2 \mu + \cos^2 \gamma\right) = 2g(y'_{1,0} - y'_1).$$

De l'équation

$$y'_1 = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta$$

et de l'équation (9) on déduit

$$y'_1 = \frac{h \sin\gamma \sin\theta}{\cos\lambda} + y_1 \left(\cos\theta - \frac{\cos\mu \sin\theta}{\cos\lambda}\right).$$

Si donc nous désignons par b la valeur initiale de y_1, nous aurons pour l'équation du mouvement

$$(10) \quad \frac{1}{\cos^2\lambda} \frac{dy_1^2}{dt^2}\left(\frac{\rho^2}{y_1^2}\cos^2\mu + \cos^2\gamma\right) = 2g\left(\cos\theta - \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}\sin\theta\right)(b - y_1).$$

Nous remarquerons que $\frac{dy_1}{dt}$ est nul, par suite ω et V, pour $y_1 = 0$, c'est-à-dire que le mouvement s'éteint lorsque le solide est sur le point de quitter sa directrice pour faire ensuite une chute.

127. *De la roulette enfantine.* — Ce jouet se compose d'une capacité circulaire renfermant une petite turbine dont les aubes sont planes et radiales; les cases déterminées par les aubes sont numérotées; la paroi intérieure est creusée suivant un demi-tore dont le bord inférieur se trouve au joint du fond de la turbine. On imprime une rotation à la turbine en agissant avec la main sur un bouton qui termine son arbre. On place le couvercle du vase et, par un trou voisin de l'axe de rotation, ménagé dans ce couvercle, on laisse tomber une petite bille qui, par l'effet de la force centrifuge, est transportée dans la rigole d'où, après avoir parcouru un certain chemin, elle se rend dans une des cases de la turbine.

Lorsque la bille tombe sur la turbine, elle rejaillit d'abord par son élasticité, mais bientôt elle reste sur fond et en contact avec une aube qui la pousse au dehors.

Soient ω la rotation et u_1 le rayon de la turbine; u_0 la distance à l'axe du point de chute de la bille; α la vitesse relative de la bille à sa sortie de la turbine. L'équation de la force vive dans le mouvement relatif donne immédiatement

$$\alpha = \omega\sqrt{u_1^2 - u_0^2}.$$

La vitesse absolue de la bille, à sa sortie de la turbine, sera la

résultante de α et de la vitesse d'entraînement

$$\beta = u_1 \omega.$$

Nous prendrons maintenant pour origine du temps l'instant où la bille sort de la turbine. Soient Oz l'axe de rotation; O le centre de la circonférence directrice du tore; C le centre de la section méridienne faite par le plan mobile zOx passant par le centre G de la bille; m le contact avec la rigole; l la longueur connue CG; θ l'angle qu'elle forme avec la direction de la pesanteur; Ox_0 la position initiale de Ox; φ l'angle $\widehat{xOx_0}$. La réaction de la rigole sur la bille rencontrant Oz, le principe des aires est applicable dans le plan xOx_0 et donne

$$(u_1 + b \sin\theta)^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

et, comme pour $\theta = 0$ on a $u_1 \frac{d\varphi}{dt} = \beta$, il vient

$$(1) \qquad (u_1 + l \sin\theta)^2 \frac{d\varphi}{dt} = u_1 \beta.$$

La force vive du mobile, dans son mouvement autour du centre de gravité, étant constante, disparaît dans l'équation de Kœnigs qui se réduit à

$$l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + (u_1 + l \sin\theta)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2gl\cos\theta + \text{const.}$$

Or pour $\theta = 0$ on a $l \frac{d\theta}{dt} = \alpha$, $u_1 \frac{d\varphi}{dt} = \beta$, par suite

$$(2) \qquad l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + (u_1 + l \sin\theta)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = -2gl(1 - \cos\theta) + \alpha^2 + \beta^2.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$ entre les équations (1) et (2), on obtient la suivante

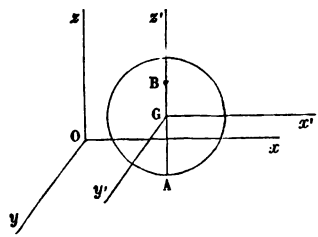
$$l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = -4g \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha^2 + \beta^2 - \frac{u_1^2 \beta^2}{(u_1 + l \sin\theta)^2},$$

qui fera connaître t en fonction de θ par une quadrature.

128. *Glissement d'une sphère pesante sur un plan horizontal.* — Nous supposerons que la sphère est composée de couches concentriques homogènes et, pour simplifier l'écriture, nous prendrons sa masse égale à l'unité.

Soient (*fig.* 53)

Fig. 53.



R le rayon de la sphère et $\frac{R^2}{K}$ son moment d'inertie par rapport à un diamètre;

Ox, Oy deux axes rectangulaires tracés dans le plan horizontal et Oz sa normale;

Gx', Gy', Gz' trois axes parallèles aux précédents, menés par le centre G de la sphère;

U, V les vitesses respectives de G et du point de contact A;

n, p, q les composantes de la rotation instantanée autour de G, suivant Gx', Gy', Gz';

fg le frottement de glissement qui est dirigé en sens inverse de V.

L'indice o caractérisera les éléments du mouvement qui se rapportent à l'instant initial.

On a

$$(1) \qquad V_x = U_x - pR, \qquad V_y = U_y + nR.$$

Les équations du mouvement du centre de gravité sont

$$(2) \qquad \frac{dU_x}{dt} = -\frac{V_x}{V} fg, \qquad \frac{dU_y}{dt} = -\frac{V_y}{V} fg,$$

et celles du mouvement de rotation autour de ce centre

$$(3) \qquad \frac{R^2}{K}\frac{dn}{dt} = -\frac{V_y}{V} fgR, \qquad \frac{R^2}{K}\frac{dp}{dt} = \frac{V_x}{V} fgR.$$

En divisant l'une par l'autre les équations (2) et ayant égard aux valeurs (1), on arrive à

$$(4)\qquad \frac{dU_x}{U_z - pR} = \frac{dU_y}{U_y + nR}.$$

Si l'on divise la seconde des équations (3) par la première des équations (2), et la première des équations (3) par la seconde des équations (2), on obtient

$$R\,dp = -K\,dU_x, \qquad R\,dn = K\,dU_y,$$

d'où

$$(5)\qquad Rp = Rp_0 - K(U_x - U_{0x}), \qquad Rn = Rn_0 + K(U_y - U_{0y}),$$

et (4) devient

$$(4')\qquad \frac{dU_x}{U_x(1+K) - KU_{0x} - Rp_0} = \frac{dU_y}{U_y(1+K) - KU_{0y} + Rn_0},$$

d'où, en intégrant,

$$(6)\qquad \frac{U_x(1+K) - KU_{0x} - Rp_0}{U_y(1+K) - KV_{0y} + Rn_0} = \text{const.}$$

Mais, vu (4) et (1), les dénominateurs de (4') ne sont autre chose que V_x et V_y, de sorte que (6) exprime $\frac{V_x}{V_y} = \text{const.}$ Donc *la direction du frottement est constante.*

Si nous prenons pour Oy la direction de V, les équations (2) et (3) nous donnent

$$(2')\qquad U_x = U_{0x}, \qquad U_y = U_{y0} - fgt,$$

$$(3')\qquad Rn = Rn_0 - fgkt, \qquad p = p_0.$$

Prenons pour origine la projection horizontale O de la position initiale G_0 de G; en désignant par a la vitesse initiale de G, par α son inclinaison sur Ox, enfin par x, y les coordonnées de A, nous avons

$$U_{0x} = a\cos\alpha, \qquad U_{0y} = a\sin\alpha, \qquad U_x = \frac{dx}{dt}, \quad U_y = \frac{dy}{dx},$$

et les équations (2′) nous donnent

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\cos\alpha. & \dfrac{dy}{dt} = a - fgt, \\ x = a\cos\alpha.t, & y = a\sin\alpha.t - \dfrac{fgt^2}{2}. \end{cases}$$

Il suit de là que le point A décrit la parabole

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{fg}{2}(1+\mathrm{tang}^2\alpha)\frac{x^2}{a^2} \qquad \text{(Jean Euler).}$$

Le glissement se terminera, pour être suivi du roulement, quand on aura $V = V_y = 0$, et d'après la seconde des équations (1) et les équations (2′), (3′) on a successivement

$$0 = U_y + nR,$$
$$0 = U_{0y} + n_0 R - fg(1+K)t$$

et

$$0 = V_0 - fg(1+K)t,$$

d'où

$$t = \frac{V_0}{fg(1+K)}.$$

Les formules (7) feront enfin connaître les coordonnées du point de contact à partir duquel le roulement aura lieu suivant la tangente en ce point à la parabole.

§ V. — De l'influence du frottement dans le choc de deux corps solides.

129. Pendant la durée du choc il se développe au contact une composante tangentielle de l'action mutuelle du corps qui suit la loi du frottement ordinaire [1].

Reportons-nous, en ce qui concerne la première partie du

---

[1] Morin, *Recueil des Savants étrangers à l'Académie des Sciences;* 1835.

choc, au n° 112. Nous avons obtenu l'équation

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2 - \Sigma m w^2 - \Sigma m \overline{v\mathrm{I}} v.$$

Soient u la vitesse relative, au point de choc des deux corps M, M'; f le coefficient de frottement : comme

$$\Sigma m \overline{v\mathrm{I}}.v\,dt - fu\,dt \int \mathrm{N}\,dt = 0,$$

il vient

$$\text{(A)} \qquad \Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2 - \Sigma m w^2 - 2fu \int \mathrm{N}\,dt.$$

Pour la seconde partie du choc, on ne peut rien préciser; nous admettrons, et sans qu'on puisse soulever d'objections sérieuses, que la force vive restituée dans cette seconde partie est la même que s'il n'y avait pas de frottement; nous estimerons à $-fu \int \mathrm{N}\,dt$ le travail du frottement, l'intégrale étant prise ici pour toute la durée du choc, et en conservant à u sa première signification ; nous aurons ainsi à la fin du choc

$$\text{(B)} \qquad \Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2 - \varepsilon \Sigma m w^2 - 2fu \int \mathrm{N}\,dt.$$

Dans l'étude des machines à chocs [1], on admet, pour des motifs que nous n'avons à rappeler ici, que les corps choquants sont dépourvus d'élasticité; mais il est inutile d'avoir recours à l'équation (A); il est plus simple, en effet, d'exprimer qu'après le choc les vitesses normales au contact des deux corps sont égales.

En ce qui concerne les corps semi-élastiques, nous nous bornerons à résoudre la question suivante qui se rapporte à la théorie des effets du jeu de billard.

130. *Choc de deux sphères composées de couches concentriques homogènes.* — Nous nous conformerons autant que possible aux notations du n° 114.

---

[1] T. III, Chap. IV, § V.

Soient

O, O′ les centres, R, R′ les rayons; $M\frac{R^2}{K}$, $M'\frac{R'^2}{K'}$ les moments d'inertie par rapport à un diamètre du corps choquant M et du corps choqué M′;

A le point de choc;

Ay, Az deux axes rectangulaires perpendiculaires à A Ox,

et à un instant quelconque du choc :

V, V′ les vitesses de O, O′;

n, p, q et n', p', q' les composantes suivant Ax, Ay, Az des rotations instantanées de M, M′ autour de O, O′;

β l'angle que fait avec Ay la direction du frottement de M sur M′.

Nous pouvons faire abstraction des composantes n, n' qui restent constantes pendant toute la durée du choc.

Nous avons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &M\frac{dV_x}{dt} = N,\\ &M\frac{dV_y}{dt} = Nf\cos\beta,\\ &M\frac{dV_z}{dt} = Nf\sin\beta,\\ &M\frac{R^2}{K}\frac{dp}{dt} = RNf\sin\beta,\\ &M\frac{R^2}{K}\frac{dq}{dt} = -RNf\cos\beta;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &M'\frac{dV'_x}{dt} = -N,\\ &M'\frac{dV'_y}{dt} = -Nf\cos\beta,\\ &M'\frac{dV'_z}{dt} = -Nf\sin\beta,\\ &M'\frac{R'^2}{K'}\frac{dp'}{dt} = R'Nf\sin\beta,\\ &M'\frac{R'^2}{K'}\frac{dq'}{dt} = -R'Nf\cos\beta.\end{aligned}\right.$$

On déduit de là

$$(3)\quad \begin{cases} M(V_x - V_{0x}) + M'(V'_x - V'_{0x}) = 0, \\ M(V_y - V_{0y}) + M'(V'_y - V'_{0y}) = 0, \\ M(V_z - V_{0z}) + M'(V'_z - V'_{0z}) = 0; \end{cases}$$

$$(1')\quad \begin{cases} K(V_y - V_{0y}) + R(q - q_0) = 0, \\ K(V_z - V_{0z}) + R(p - p_0) = 0; \end{cases}$$

$$(2')\quad \begin{cases} K'(V'_y - V'_{0y}) - R'(q' - q'_0) = 0, \\ K'(V'_z - V'_{0z}) + R'(p' - p'_0) = 0. \end{cases}$$

Nous avons

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{V_z + Rp - V'_z + R'p'}{V_y - Rq - V'_y - R'q'},$$

ou, en éliminant V'_y, V'_z, p, q, p', q' au moyen des équations précédentes,

$$(4)\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{(V_z - V_{0z})\left(1 + \frac{M}{M'} + K + K'\frac{M}{M'}\right) + V_{0z} - V'_{0z} + Rp_0 + R'p'_0}{(V_y - V_{0y})\left(1 + \frac{M}{M'} + K + K'\frac{M}{M'}\right) + V_{0y} - V'_{0y} - Rq_0 - R'q'_0}.$$

Mais on a aussi, vu (1),

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{dV_z}{dV_y};$$

en substituant et intégrant on voit que le rapport du numérateur au dénominateur de la fraction ci-dessus est constant, et que, par suite, pendant toute la durée du choc, la direction du frottement est constante. Nous dirigerons Ay dans le sens du frottement de M sur M'. D'après les équations (1) et (2) nous aurons

$$V_z = V_{0z}, \qquad p = p_0, \qquad V'_z = V'_{0z}, \qquad p' = p'_0,$$

et il ne reste des équations (3), (1'), (2') que celles-ci

$$\begin{cases} M(V_x - V_{0x}) + M'(V'_x - V'_{0x}) = 0, \\ M(V_y - V_{0y}) + M'(V'_y - V'_{0y}) = 0, \\ K(V_y - V_{0y}) + R(q - q_0) = 0, \\ K'(V'_y - V'_{0y}) - R'(q' - q'_0) = 0, \end{cases}$$

auxquelles nous joindrons la suivante qui résulte des deux premières équations (1),

$$V_y - V_{0y} = f(V_x - V_{0x}). \tag{6}$$

Alors nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} V'_x - V'_{0x} &= -\frac{M}{M'}(V_x - V_{0x}),\\ V'_y - V'_{0y} &= -f\frac{M}{M'}(V_x - V_{0x}),\\ R(q - q_0) &= -fK(V_x - V_{0x}),\\ R'(q' - q'_0) &= -fK'\frac{M}{M'}(V_x - V_{0x}). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La valeur absolue de la vitesse relative de glissement de M sur M′ est le dénominateur changé de signe de l'expression (4), et, en ayant égard à la relation (6), cette valeur est

$$-f(V_x - V_{0x})\left(1 + \frac{M}{M'} + K + K'\frac{M}{M'}\right) - V_{0y} + V'_{0y} + Rq_0 + R'q'_0.$$

Nous négligerons le carré de f, et, par conséquent, dans la formule (B) du numéro précédent, nous ferons abstraction du frottement et, eu égard à l'expression ci-dessus, nous prendrons

$$u = V'_{0y} - V_{0y} + R'q'_0 + Rq_0.$$

En remarquant que la première des équations (1) donne

$$\int N\,dt = M(V_x - V_{0x}),$$

nous avons

$$\begin{aligned} &M(V_x^2 - V_{0x}^2 + V_y^2 - V_{0y}^2) + M'(V'^2_x - V'^2_{0x} + V'^2_y - V'^2_{0y})\\ &\quad + \frac{MR^2}{K}(q^2 - q_0^2) + \frac{M'R'^2}{K'}(q'^2 - q'^2_0)\\ &\quad = -\varepsilon[M(V_x - V_{0x})^2 + M'(V'^2_x - V'_{0x})^2] - 2uM(V_x - V_{0x})f. \end{aligned}$$

Au moyen des équations (6) et (7), nous pouvons faire disparaître le facteur $M(V_x - V_{0x})$, et il nous reste

$$\begin{aligned} &V_x + V_{0x} + f(V_y + V_{0y}) - [V'_x + V'_{0x} + f(V'_y + V'_{0y})]\\ &\quad - Rf(q + q_0) - R'f(q' + q'_0)\\ &\quad = -\varepsilon[V_x - V_{0x} - (V'_x - V'_{0x})] - 2uf, \end{aligned}$$

ou, en continuant à négliger f^2,

$$V_x + V_{0x} - (V'_x + V'_{0x}) = -\varepsilon(V_x - V_{0x})\left(1 + \frac{M}{M'}\right).$$

En substituant à V'_x sa valeur donnée par la première des équations (7), on trouve

$$V_x - V_{0x} = \frac{2M'(V'_{0x} - V_{0x})}{(1+\varepsilon)(M+M')},$$

comme s'il n'y avait pas de frottement, et l'on a, par suite, tous les éléments du mouvement après le choc.

En supposant $R' = R$, les formules obtenues s'appliqueront au choc de deux billes de même diamètre placées sur un tapis; on peut prendre $f = 0,03$: la constante ε n'a pas été bien déterminée, mais paraît peu s'éloigner de $0,10$.

Ce qui précède s'applique au choc d'une sphère M contre un plan, en y supposant $M' = \infty$, $V' = 0$, et il ne reste que la troisième des équations (7) : c'est à peu près le cas du choc d'une bille contre une bande, et l'on peut prendre alors

$$f = 0,20, \qquad \varepsilon = 0,29.$$

CHAPITRE XI.

DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR D'UN CORPS, QUELLE QU'EN SOIT LA NATURE.

131. *Équations de l'équilibre en coordonnées rectilignes.* — Soient

x, y, z les coordonnées d'un point O′, d'où partent les arêtes dx, dy, dz d'un parallélépipède élémentaire;
ρ la densité en O′;
X, Y, Z les composantes parallèles à Ox, Oy, Oz de l'accélération de la force extérieure qui sollicite le parallélépipède;
p_x la pression (n° 43) sur la face $dydz$, partant de O′, et p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} ses composantes parallèles à Ox, Oy, Oz.

De ces notations on déduira d'analogues pour les deux autres faces.

La condition d'équilibre du parallélépipède, qui se rapporte à Ox, est

$$dydz\left(p_{xx}-p_{xx}-\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)+dxdz\left(p_{yx}-p_{yx}-\frac{\partial_{yx}}{\partial y}dy\right)$$
$$+dzdy\left(p_{zx}-p_{zx}-\frac{\partial_{zx}}{\partial z}dz\right)+\rho dxdydz=0$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}=\rho X \qquad \text{et de même}\\ &\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}=\rho Y,\\ &\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}=\rho Z.\end{aligned}\right.$$

En prenant les moments par rapport à la parallèle à Oz, menée par le centre de gravité du parallélépipède, on obtient

$$p_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2} + dx\,dz\left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\,dy\right)\frac{dy}{2}$$
$$- p_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2} - dy\,dz\left(p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}\,dx\right)\frac{dx}{2} = 0,$$

d'où, après avoir divisé par $dx\,dy\,dz$,

$$p_{yx} = p_{xy}.$$

On peut donc intervertir l'ordre des deux lettres des indices des composantes des pressions.

132. *Tétraèdre élémentaire.* — Soient

un plan infiniment voisin de O', déterminant un tétraèdre dont $O'A$, $O'B$, $O'C$ sont les arêtes parallèles à Ox, Oy, Oz;
p' la pression sur la base $ABC = d\omega$;
α, β, γ les angles de la normale à $d\omega$ avec Ox, Oy, Oz.

Les faces $CO'B$, $CO'A$, $AO'B$ sont respectivement égales à

$$d\omega\cos\alpha,\quad d\omega\cos\beta,\quad d\omega\cos\gamma.$$

Les pressions donnent parallèlement à Ox

$$p_{xx}\,d\omega\cos\alpha + p_{yx}\,d\omega\cos\beta + p_{zx}\,d\omega\cos\gamma - p'_x\,d\omega,$$

expression de second ordre devant laquelle le terme en ρX, qui est du troisième ordre, est négligeable; elle est donc nulle et, en permutant les lettres, on a

$$(2)\qquad p'_x = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma;$$

ce qui exprime que la projection de p' sur Ox est égale à la projection de p_x sur la normale à $d\omega$. Soient généralement p_1, p_2 les pressions sur deux éléments passant par un même point; N_1, N_2 les normales à ces éléments : on a

$$p_1\cos(p_1, N_2) = p_2\cos(p_2, N_1),$$

ce qui constitue le théorème dit *de l'égalité des composantes normales réciproques.*

Pour plus de simplicité, on supposera que le tétraèdre est transporté parallèlement à lui-même, de manière à faire coïncider O′ avec O.

133. *Directrice.* — En désignant par p'_n la composante normale de p', on a, vu la formule (2) et des analogues,

$$\begin{aligned}
p'_n = {} & p'_x \cos\alpha + p'_y \cos\beta + p'_z \cos\gamma \\
= {} & (p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma)\cos\alpha \\
& + (p_{yy}\cos\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\cos\beta \\
& + (p_{zz}\cos\gamma + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\cos\gamma \\
= {} & p_{xx}\cos^2\alpha + p_{yy}\cos^2\beta + p_{zz}\cos^2\gamma \\
& + 2p_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2p_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Portons sur la normale la longueur $OK = \frac{1}{\sqrt{p'^2_n}}$ et désignons par x, y, z les coordonnées du point K. Nous avons $\cos\alpha = x\sqrt{p'^2_n}$, $\cos\beta = \ldots$, $\cos\gamma = \ldots$, et l'équation précédente se transforme dans celle-ci :

$$(3) \qquad x^2 p_{xx} + y^2 p_{yy} + z^2 p_{zz} + 2xy p_{xy} + \ldots = 1$$

qui représente une surface du second degré (*Indicatrice de Cauchy*). Si on la rapporte à ses axes principaux, on a $p_{xy} = 0$, $p_{yz} = 0$, $p_{zx} = 0$. Donc, en chaque point du corps, il existe trois éléments orthogonaux pour chacun desquels la pression est normale. Soient P_x, P_y, P_z les pressions normales dites *principales;* on a, pour un élément quelconque,

$$(4) \qquad p'_x = P_x\cos\alpha, \qquad p'_y = P_y\cos\beta, \qquad p'_z = P_z\cos\gamma.$$

134. *Ellipsoïde des pressions.* — Portons sur la direction de p' la longueur $\overline{OI} = p'$, et soient x, y, z les coordonnées du point I; nous avons $\cos\alpha = \frac{x}{P_x}$, $\cos\beta = \frac{y}{P_y}$, $\cos\gamma = \frac{z}{P_z}$, d'où l'équation

$$(5) \qquad \frac{x^2}{P_x^2} + \frac{y^2}{P_y^2} + \frac{z^2}{P_z^2} = 1,$$

qui représente un ellipsoïde.

135. *Détermination des pressions principales lorsque le corps est rapporté à un système d'axes rectangulaires quelconque.* — Soit P l'une de ces pressions; on déduit de l'équation (2)

$$P\cos\alpha = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma, \quad P\cos\beta = \ldots, \quad P\cos\gamma = \ldots$$

et, en éliminant $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ entre ces dernières relations, on trouve

$$\begin{aligned} P^3 &- (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})P^2 + (p_{xx}p_{yy} + p_{yy}p_{zz} + p_{zz}p_{xx})P \\ &- (p_{xx}p_{yy}p_{zz} + 2p_{xy}p_{yz}p_{zx} - p_{xx}p_{yz}^2 - p_{yy}p_{xz}^2 - p_{zz}p_{xy}^2) = 0, \end{aligned}$$

ce qui déterminera les trois pressions principales et, par suite, leur orientation. Une racine négative répondra à une traction.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que la somme des composantes normales des pressions sur trois éléments rectangulaires est constante.

136. *Pression sur un élément quelconque perpendiculaire à un plan fixe xOy.* — En faisant $\gamma = 90°$, $\beta = 90° - \alpha$, dans la formule (2) et celles qui en dérivent, on obtient

$$\begin{aligned} p'_x &= p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\sin\alpha, \\ p'_y &= p_{yx}\cos\alpha + p_{yy}\sin\alpha, \\ p'_z &= p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\sin\alpha. \end{aligned}$$

Soit Ox' la normale à l'élément considéré; on a

$$(6) \quad \begin{cases} p_{x'x'} = p'_x\cos\alpha + p'_y\sin\alpha = p_{xx}\cos^2\alpha + p_{yy}\sin^2\alpha + p_{xy}\sin 2\alpha, \\ p_{x'y'} = p'_y\cos\alpha - p'_x\sin\alpha = \frac{1}{2}(p_{yy} - p_{xx})\sin 2\alpha + p_{xy}\cos 2\alpha, \\ p_{x'z} = p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\sin\alpha, \end{cases}$$

formules qui nous seront utiles plus loin.

137. *Équations de l'équilibre en coordonnées cylindriques.* — Concevons que le corps soit divisé en éléments par trois séries de surfaces orthogonales : la première composée de cylindres de révolution autour de Oz; la deuxième, de plans parallèles à xOy, et la troisième de plans passant par Oz.

Soient (*fig.* 54)

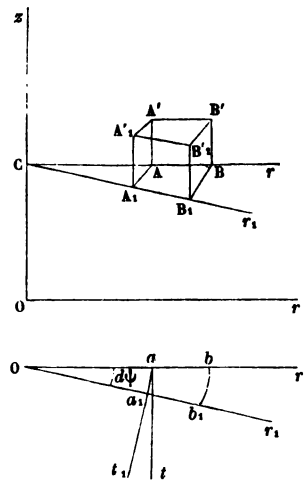
A l'intersection du cylindre dont le rayon est $CA = r$, du plan zOA faisant avec zOx l'angle ψ et du plan parallèle à xOy défini par l'ordonnée z;

$CB = r + dr$ suivant CA;

A_1, B_1 les positions que prennent A, B lorsque ψ augmente de $d\psi$;

A', B', A'_1, B'_1 celles que prennent A, B, A_1, B_1 quand z augmente de dz;

Fig. 54.



a, b, a_1, b_1 les projections de A, B, A_1, B_1 sur xOy;

ar, a_1r_1 les prolongements de Oa, Oa_1;

at, a_1t_1 les perpendiculaires en a et a_1 à ar, a_1r_1 menées dans le sens de l'accroissement de ψ;

T, R, Z les composantes suivant At, Ar, Az de l'accélération de la force extérieure qui sollicite la masse $\rho dr dz r d\psi$ de l'élément de volume $ABB'A'A'_1B'_1B_1A_1$;

$$\left.\begin{array}{l} p_{tt}, p_{tr}, p_{tz} \\ p_{rt}, p_{rr}, p_{rz} \\ p_{rt}, p_{zr}, p_{zz} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{les composantes suivant } at, \\ \quad ar, Oz \text{ de la pression exer-} \\ \quad \text{cée sur les faces.} \end{array} \left\{\begin{array}{l} AA'BB' = dr dz, \\ AA'A'_1A' = r d\psi dz, \\ AA_1B_1B = r d\psi dz, \end{array}\right.$$

en donnant ainsi de l'extension au système de notations du

n° **131**, ce qui permet d'intervertir l'ordre des lettres des indices.

Sur les faces opposées $AA'BB'_1A_1A'_1B_1B'_1$ s'exercent respectivement les pressions élémentaires

1° $$dr\,dz\,p_{tt} \qquad \text{suivant } at,$$
$$-dr\,dz\left(p_{tt}+\frac{\partial p_{tt}}{\partial\psi}\,d\psi\right) \qquad \text{»} \quad a_1t_1,$$

qui se réduisent à

$$-dr\,dz\,d\psi\,\frac{\partial p_{tt}}{\partial\psi} \text{ suivant } at,$$
$$dr\,dz\,d\psi\,p_{tt} \qquad \text{»} \quad ar;$$

2° $$dr\,dz\,p_{tr} \qquad \text{suivant } ar,$$
$$-dr\,dz\left(p_{tr}+\frac{\partial p_{tr}}{\partial\psi}\,\partial\psi\right) \qquad \text{»} \quad a_1r_1,$$

qui se réduisent à

$$-dr\,dz\,d\psi\,\frac{\partial p_{tr}}{\partial\psi} \text{ suivant } ar,$$
$$-dr\,dz\,d\psi\,d_{tr} \qquad \text{»} \quad at;$$

3° $$dr\,dz\,p_{tz} \qquad \text{suivant } Oz,$$
$$-dr\,dz\left(p_{tz}+\frac{\partial p_{tz}}{\partial\psi}\,d\psi\right) \qquad \text{»} \quad Oz,$$

qui se réduisent à

$$-dr\,dz\,d\psi\,\frac{\partial p_{tz}}{\partial\psi} \text{ suivant } Oz.$$

Pour les deux autres couples de faces, les pressions semblables ont la même direction et chaque couple ne donne qu'une seule résultante. On a pour la face $AA_1A'_1A'$ et son opposée

$$r\,d\psi\,dz\,p_{rr}-d\psi\,dz\left(r\,p_{rr}+\frac{\partial r\,p_{rr}}{\partial r}\,dr\right)=-dr\,dz\,d\psi\left(p_{rr}+r\,\frac{\partial p_{rr}}{dr}\right) \quad \text{suivant } ar,$$

$$r\,d\psi\,dz\,p_{rt}-d\psi\,dz\left(r\,p_{rt}+\frac{\partial r\,p_{rt}}{\partial r}\,dr\right)=-dr\,dz\,d\psi\left(p\,r_t+r\,\frac{\partial p_{rt}}{\partial r}\right) \quad \text{suivant } at,$$

$$r\,d\psi\,dz\,p_{rz}-d\psi\,dz\left(r\,p_{rz}+\frac{\partial r\,p_{rz}}{\partial r}\,dr\right)=-dr\,dz\,d\psi\left(p_{tz}+r\,\frac{\partial p_{rz}}{\partial r}\right) \quad \text{suivant } Oz.$$

Enfin, on trouve facilement pour le troisième couple de faces

$$-r\,d\psi\,dz\,dr\,\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \text{ suivant } Oz,$$

$$-r\,d\psi\,dz\,dr\,\frac{\partial p_{zt}}{\partial z} \quad \text{»} \quad at,$$

$$-r\,d\psi\,dz\,dr\,\frac{\partial p_{zr}}{\partial z} \quad \text{»} \quad ar.$$

Si maintenant, pour chacune des trois directions considérées, on fait la somme des composantes des pressions élémentaires et de la projection correspondante de la force extérieure, on trouve, pour les équations cherchées,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{rt}}{\partial \psi} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{tt}}{r} = \rho R,\\ &\frac{1}{r}\frac{\partial p_{tt}}{\partial \psi} + \frac{\partial p_{tr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{tz}}{\partial z} + \frac{2}{r}p_{tr} = \rho T,\\ &\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{zt}}{\partial \psi} + \frac{\partial p_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}p_{rz} = \rho Z \quad (^1).\end{aligned}\right.$$

(1) On établit de la même manière les équations d'équilibre intérieur en coordonnées sphériques, que nous n'écrirons pas parce qu'elles ne nous seraient pas utiles dans ce qui suit (*voir*, à ce sujet, notre *Traité de Physique mathématique*, t. I, p. 148).

CHAPITRE XII.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ.

§ I. — Généralités.

138. Lorsqu'un corps solide réel est soumis à l'action de forces extérieures, ses molécules entrent en mouvement; il se déforme successivement jusqu'au moment où l'équilibre s'établit entre ces forces et les actions moléculaires modifiées par la variation des intervalles moléculaires. Si les intensités des forces extérieures ne dépassent pas certaines limites, dès que ces forces ont cessé d'agir, le solide finit par reprendre sa forme primitive à la suite de vibrations moléculaires. Cette propriété constitue ce qu'on appelle l'*élasticité*.

Tous les solides sont élastiques dans certaines limites, variables avec leur nature; mais généralement la propriété de l'élasticité ne subsiste que pour des déformations très petites par rapport aux dimensions du corps ou, si l'on veut, pour des variations relativement très petites des distances intermoléculaires primitives, variations dont on néglige par suite les carrés.

On considérera les forces extérieures et les pressions comme agissant sur les éléments non déformés du volume; on fera abstraction de la déformation de la surface du corps sur laquelle peut s'exercer une pression quelconque.

139. *Déformation d'un corps élastique sous l'action de forces extérieures.* — Soient

m', m les positions de deux molécules du corps à l'état na-

turel, dont la distance r est au plus égale au rayon de la sphère d'activité;

x, y, z et $x+h, y+k, z+l$ leurs coordonnées par rapport à trois axes fixes Ox, Oy, Oz;

m'_1, m_1 les positions que prennent m', m après la déformation;

$x+u, y+v, z+w$ les coordonnées de m'_1.

Les longueurs u, v, w, h, k, l seront censées assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés et les produits deux à deux.

Nous poserons

$$(a)\quad \begin{cases} \delta_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \delta_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \delta_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}, & \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx}. \end{cases}$$

et nous désignerons par χ, η, ζ les projections de $m'_1 m_1$ sur Ox, Oy, Oz.

La coordonnée de m_1 parallèle à Ox s'obtiendra en remplaçant x, y, z par $x+h, y+k, z+l$ dans celle de m'_1 et sera par suite

$$x+h+u+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial u}{\partial z}l = x+u+h+h\delta_x+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z};$$

par suite

$$(b)\quad \begin{cases} \chi = (1+\delta_x)h + k\dfrac{\partial u}{\partial y} + l\dfrac{\partial u}{\partial z}, & \text{et de même} \\ \eta = \dfrac{\partial v}{\partial x}h + k(1+\delta_y) + l\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \zeta = \dfrac{\partial w}{\partial x}h + k\dfrac{\partial w}{\partial y} + l(1+\delta_z). \end{cases}$$

Soient

$m'\chi, m'\eta, m'\zeta$ trois axes parallèles à Ox, Oy, Oz menés par m';

$m'n$ la droite égale et parallèle à $m'_1 m_1$ (les coordonnées de n par rapport à ces axes seront χ, η, ζ);

$d\omega$ un élément superficiel dans le corps à l'état naturel, passant par m';

α, β, γ les angles de la normale à $d\omega$ avec $m'\chi, m'\eta, m'\zeta$.

I. *Dilatations.* — Supposons que le point m se trouve sur la normale à $d\omega$; nous avons $h = r\cos\alpha$, $k = r\cos\beta$, $l = r\cos\gamma$, par suite

$$(c)\quad \frac{\chi}{r} = (1+\delta_x)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \quad \frac{\eta}{r} = \ldots, \quad \frac{\zeta}{r} = \ldots.$$

L'accroissement relatif, positif ou négatif de $m'm$ ou $\delta_r = \frac{m'n - m'm}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\chi^2+\eta^2+\zeta^2} - 1$ de $m'm$ est ce qu'on appelle la *dilatation normale* à $d\omega$, et l'on a, vu (b), en négligeant les carrés et les produits des dérivées partielles de u, v, w, censées aussi très petites,

$$\delta_r = \sqrt{1 + 2\delta_x\cos^2\alpha + \ldots + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta + \ldots} - 1$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \delta_r = {} & \delta_x\cos^2\alpha + \delta_y\cos^2\beta + \delta_z\cos^2\gamma \\ & + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que δ_x, par exemple, est la dilatation dans le sens de $m'\chi$.

Si r, r', r'' se trouvent sur trois directions rectangulaires, on a

$$\delta_r + \delta_{r'} + \delta_{r''} = \delta_x + \delta_y + \delta_z = \text{const.},$$

ce qui devait être; en effet, le parallélépipède $dx\,dy\,dz$ est devenu

$$\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left(dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\left(dz + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)$$
$$= dx\,dy\,dz(1 + \delta_x + \delta_y + \delta_z),$$

d'où, pour la dilatation cubique, qui est indépendante de l'orientation des axes coordonnés, $\Delta = \delta_x + \delta_y + \delta_z$.

On voit que $m'n$ est la normale matérielle $m'm$ déformée; on la caractérisera par l'index N_1 et on désignera par α_1, β_1, γ_1 les angles qu'elle forme avec Ox, Oy, Oz; on aura aussi

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{\chi}{r(1+\delta_r)} = (1+\delta_x-\delta_r)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \\ \cos\beta_1 &= + \ldots, \\ \cos\gamma_1 &= \ldots. \end{aligned}\right.$$

II. *Glissements.* — Nous supposerons ici que m se trouve dans le plan de $d\omega$, et nous désignerons par $d\omega_2$ la position que prend cet élément après la déformation, transportée parallèlement à elle-même en m'. Nous avons d'abord

$$(e) \qquad h\cos\alpha + k\cos\beta + l\cos\gamma = 0.$$

Si nous résolvons les équations (b) par rapport à h, k, l, nous obtenons des résultats de la forme

$$\mathrm{D}.h = \chi(1+\delta_y+\delta_z) - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \mathrm{D}.k = \ldots, \qquad \mathrm{D}.l = \ldots$$

et en portant les valeurs de h, k, l dans l'équation (e), nous trouvons pour l'équation du plan de $d\omega_2$

$$(f) \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi\left[(1+\delta_y+\delta_z)\cos\alpha - \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\beta - \dfrac{\partial w}{\partial x}\cos\gamma\right] \\ +\eta\,[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \\ +\zeta\,[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 0. \end{array}\right.$$

Soient α_2, β_2, γ_2 les angles de la normale $m'\mathrm{N}_2$ à $d\omega_2$ avec $m'\chi$, $m'\eta$, $m'\zeta$; on déduit de l'équation (f),

$$(g) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_2 = (1-\delta_x\sin^2\alpha+\delta_y\cos^2\beta+\delta_z\cos^2\gamma)\cos\alpha - \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\beta - \dfrac{\partial w}{\partial x}\cos\gamma, \\ \cos\beta_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos\gamma_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

L'angle $\gamma_r = (\widehat{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2})$ est ce qu'on appelle le *glissement* dans $d\omega$; c'est ainsi l'angle compris sous la normale matérielle déformée et la normale à l'élément déplacé.

Si l'on porte $\overline{m'\mathrm{N}_1} = \overline{m'\mathrm{N}_2} = 1$, on a $\gamma_r = \overline{\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2}$, et pour sa projection sur $\mathrm{O}x$,

$$\gamma_{rx} = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2.$$

En ayant égard à (d), où l'on remplacera δ_r par sa valeur (1), et à (g), on obtient

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma_{rx} = 2(\delta_x\sin^2\alpha - \delta_y\cos^2\beta - \delta_z\cos^2\gamma)\cos\alpha \\ \qquad\qquad - (\gamma_{xy}\cos\beta + \gamma_{xz}\cos\gamma)\cos 2\alpha - 2\gamma_{yz}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \\ \gamma_{ry} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{rz} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si r est parallèle à Oy, on a $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = 90°$ et $\gamma_{rx} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{rz} = \gamma_{yz}$, et γ_y est le glissement dans l'élément en m' normal à Oy.

140. *Dilatations et glissements se rapportant à deux éléments rectangulaires normaux au plan xOy.* — Soient

$m'x'$, $m'y'$ les normales à ces éléments;
α l'inclinaison de la première sur $m'\chi$ ou $m'x'$;
u', v' les projections de $\bar{u} + \bar{v}$ sur $m'x'$, $m'y'$.

On a

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$
$$u' = u\cos\alpha + v\sin\alpha, \qquad v' = -u\sin\alpha + v\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \delta_x\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha, \qquad \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \delta_y\sin\alpha,$$
$$\frac{\partial v'}{\partial x} = -\delta_x\sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha + \delta_y\cos\alpha;$$

puis, pour les dilatations,

$$(3)\quad \begin{cases} \delta_{x'} = \dfrac{\partial u'}{\partial x'} = \dfrac{\partial u'}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x'} + \dfrac{\partial u'}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x'} = \delta_x\cos^2\alpha + \delta_y\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha, \\ \delta_{y'} = \dfrac{\partial v'}{\partial y'} = \delta_x\sin^2\alpha + \delta_y\cos^2\beta - \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha. \end{cases}$$

On a ensuite

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial u'}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial u'}{\partial y}\cos\alpha = \frac{1}{2}(\delta_y - \delta_x)\sin 2\alpha - \frac{\partial v}{\partial x}\sin^2\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos^2\alpha,$$
$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{2}(\delta_y - \delta_x)\sin 2\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\alpha,$$

d'où, en faisant la somme,

$$(4)\qquad \gamma_{x'y'} = (\delta_y - \delta_x)\sin 2\alpha + \gamma_{xy}\cos 2\alpha.$$

On a aussi

$$\frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z}\sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial w}{\partial y'} = -\frac{\partial w}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha;$$

d'où

$$(4')\qquad \gamma_{y'z} = -\gamma_{xz}\sin\alpha + \gamma_{yz}\cos\alpha.$$

Enfin, on trouve de la même manière

$$(4'') \qquad \gamma_{x'z} = \gamma_{xz}\cos\alpha + \gamma_{yz}\sin\alpha.$$

141. *Expressions des composantes des pressions en coordonnées rectilignes. — Corps homogènes.* — La pression sur un élément $d\omega$ ne dépendra que de la variation des longueurs mm' et des obliquités de leurs directions sur leurs directions primitives, c'est-à-dire ne dépendra que des déplacements relatifs des molécules situées dans le voisinage de $d\omega$.

Considérons en m ou (x, y, z) trois éléments perpendiculaires à Ox, Oy, Oz déterminant un tétraèdre; les déplacements relatifs des molécules situées dans le voisinage du tétraèdre seront caractérisés par δ_x, δ_y, δ_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}. Les pressions p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx} seront donc des fonctions des δ, γ et des fonctions linéaires, puisqu'on néglige les carrés de ces quantités.

Les coefficients des δ, γ seraient en général des fonctions de x, y, z; mais, comme nous ne considérons que le cas de l'homogénéité, ces coefficients seront des constantes.

Les parallèles mx, my, mz à Ox, Oy, Oz seront des axes de symétrie moléculaires du corps à l'état naturel, quelle que soit leur orientation.

Soit d'abord

$$(1) \qquad p_{xx} = A\delta_x + B\delta_y + C\delta_z + D\gamma_{zy} + E\gamma_{xz} + F\gamma_{xy}.$$

En permutant x, y, on obtient

$$(2) \qquad p_{yy} = B\delta_x + A\delta_y + C\delta_z + E\gamma_{zy} + D\gamma_{xz} + F\gamma_{xy}.$$

Il est inutile, quant à présent, d'écrire p_{zz}.

Comme dans l'expression

$$p_{xy} = A'\delta_x + B'\delta_y + C'\delta_z + D'\gamma_{zy} + E'\gamma_{xz} + F'\gamma_{xy},$$

on doit obtenir le même résultat en permutant x, y, il faut que $B' = A'$, $E' = D'$; par suite

$$(3) \qquad p_{xy} = A'(\delta_x + \delta_y) + C'\delta_z + D'(\gamma_{zy} + \gamma_{xz}) + F'\gamma_{xy},$$

d'où, par des permutations de lettres,

$$(4) \qquad p_{xz} = A'(\delta_y + \delta_z) + C'\delta_y + D'(\gamma_{zy} + \gamma_{xy}) + F'\gamma_{xz},$$

$$(5) \qquad p_{zy} = A'(\delta_y + \delta_z) + C'\delta_x + D'(\gamma_{xy} + \gamma_{zx}) + F'\gamma_{zy}.$$

Soient mx', my' deux axes rectangulaires quelconques tracés dans le plan xOy; α l'angle $\overline{x'mx}$. On identifiera les deux valeurs de $p_{x'x'}$, obtenues : 1° en substituant dans l'équation (1) les expressions des $\delta_{x'}$, $\delta_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$ du n° **140**; 2° en se reportant à la première des formules (6) du n° **136**, en ayant égard aux valeurs ci-dessus (1), (2), ... On obtiendra de cette manière

$$-(F+A')\sin 2\alpha = 0, \qquad (F-A')\sin 2\alpha = 0, \qquad C'\sin 2\alpha = 0,$$

$$\left(\frac{A-B}{2} - F'\right)\sin 2\alpha = 0,$$

$$-(1+\sin\alpha)D\sin\alpha + (1-\cos\alpha)E\cos\alpha - D'\sin 2\alpha = 0,$$

$$(1+\cos\alpha)D\cos\alpha + (1-\sin\alpha)E\sin\alpha - D'\sin 2\alpha = 0.$$

Les quatre premières de ces relations donnent

$$0 = F = A', \qquad C' = 0, \qquad A = B + 2F'$$

et les deux autres en y faisant respectivement $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$,

$$D = 0, \qquad E = 0,$$

ce qui entraîne, vu ces dernières relations, $D' = 0$.

Nous avons donc déjà

$$p_{xx} = (B+2F')\delta_x + B\delta_y + C\delta_z,$$
$$p_{yy} = B\delta_x + (B+2F')\delta_y + C\delta_z,$$
$$p_{xy} = F'\gamma_{xy}, \qquad p_{yz} = F'\gamma_{yz}, \qquad p_{zx} = F'\gamma_{zx}.$$

Des deux premières de ces équations on déduit, par des permutations de lettres,

$$p_{zz} = (B+2F')\delta_z + B\delta_y + C\delta_z,$$
$$p_{zz} = B\delta_x + (B+2F')\delta_z + C\delta_y,$$

ce qui exige que $C = B$.

Si l'on pose $B = -\lambda$, $F' = -\mu$, et qu'on continue à désigner par $\Delta = \delta_x + \delta_y + \delta_z$ la dilatation cubique, on obtient

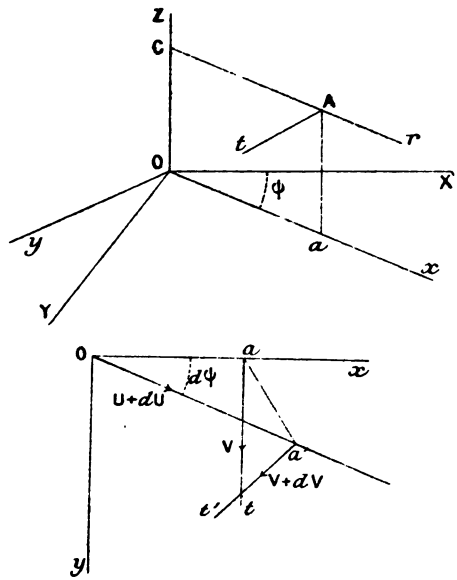
$$(A) \quad \begin{cases} p_{xx} = -(\lambda\Delta + 2\mu\delta_x), \\ p_{yy} = -(\lambda\Delta + 2\mu\delta_y), \\ p_{zz} = -(\lambda\Delta + 2\mu\delta_z), \\ p_{xy} = -\mu\gamma_{xy}, \quad p_{xz} = -\mu\gamma_{xz}, \quad p_{yz} = -\mu\gamma_{yz}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1) du n° 131, nous obtiendrons trois équations aux dérivées partielles entre les inconnues u, v, w.

En se donnant la loi de la répartition de la pression sur la surface, on aura des conditions à remplir, qu'on exprimera au moyen des formules du n° 132.

142. *Expressions des pressions en coordonnées cylindriques.* — Soient (*fig.* 55)

Fig. 55.



OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes;

a, C les projections sur le plan XOY et sur l'axe OZ d'un point A du corps à l'état naturel;

$r = \overline{Oa} = \overline{CA}$, $\psi = (\widehat{r, X})$, $z = \overline{OC}$;

At ou at la perpendiculaire du plan ZOA menée dans le sens de $d\psi$;

Ox, Oy deux axes auxiliaires dirigés l'un suivant Oa et l'autre parallèlement à at.

U, V, W les déplacements de (A, a), suivant Oa, at, OZ;
U + dU, V + dV, W + dW les déplacements d'un point (A′, a') infiniment voisin de (A, a).

Le déplacement relatif de (A′, a'), par rapport à (A, a), a pour composantes

$$du = dU - (V + dV)\,d\psi = \frac{\partial U}{\partial r}\,dr + \frac{\partial U}{r\,\partial\psi}\,r\,d\psi + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz - \frac{V r\,d\psi}{r}, \quad \text{suivant } Ox$$

$$dv = dV + (U + dU)\,d\psi = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{r\,\partial\psi}\,r\,d\psi + \frac{\partial V}{\partial r}\,dz + \frac{U r\,d\psi}{r}, \quad \text{»} \quad Oy$$

Mais $dx = dr$, $dy = r\,d\psi$; par suite

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta_x = \frac{\partial U}{\partial r} = \delta_r, \qquad \delta_y = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\psi} + \frac{U}{r} = \delta_t, \qquad \delta_z = \frac{\partial W}{\partial z},\\
&\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\psi} = \gamma_{tz},\\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} = \gamma_{zr},\\
&\gamma_{xy} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\psi} - \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r} = \gamma_{rt},\\
&\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial rU}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\psi} + \frac{\partial W}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

On a donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&p_{rr} = -\left(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial U}{\partial r}\right), && p_{tz} = -\mu\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\psi}\right),\\
&p_{tt} = -\left[\lambda\Delta + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\psi} + \frac{U}{r}\right)\right], && p_{zr} = -\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}\right),\\
&p_{zz} = -\left(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial W}{\partial z}\right), && p_{rt} = -\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\psi} - \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}\right).
\end{aligned}\right.$$

valeurs qu'on n'a plus qu'à substituer dans les équations (7) du n° 137.

143. *Expressions des pressions en coordonnées sphériques.* — Soient (*fig.* 56)

Fig. 56.

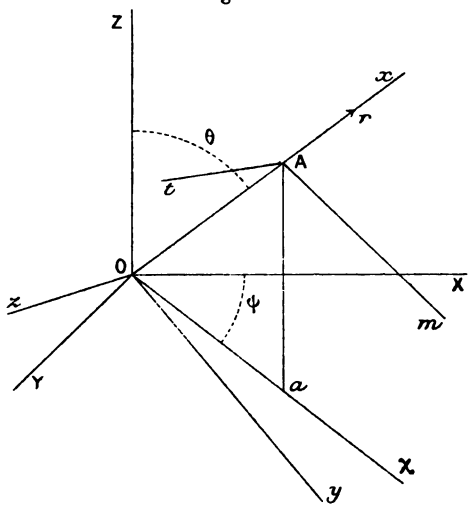
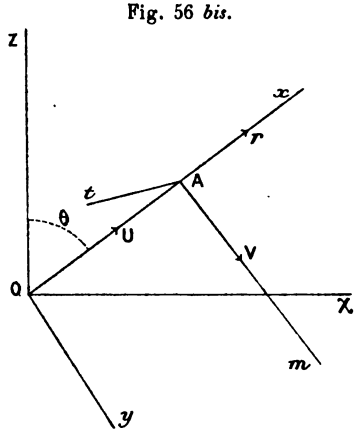


Fig. 56 *bis*.



OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes;
A un point du corps à l'état naturel, projetée en a sur XOY;
Oχ la trace du plan ZOA sur XOY;
$r = \overline{OA}$, $\theta = \widehat{AOZ}$, $\psi = \widehat{\chi OX}$ les coordonnées de A;

Am la perpendiculaire à $\overline{OA}$, dirigée vers XOY, comprise dans le plan ZOχ;

At ou at la perpendiculaire en A ou a ou ci-dessus, dirigée dans le sens de l'accroissement de ψ;

Ox, Oy, Oz trois axes auxiliaires, le premier dirigé suivant OAr et les deux autres étant respectivement parallèles à Am, At;

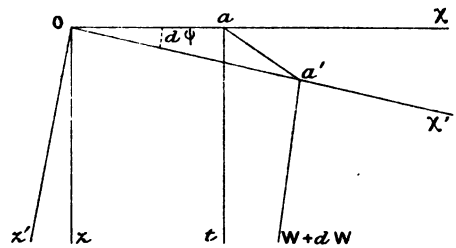
U, V, W les projections du déplacement de A sur Ar, Am, At.

On a (*fig.* 56 *bis*), pour les composantes du déplacement de A,

$$(a)\quad \begin{cases} U\sin\theta + V\cos\theta, & \text{suivant } O\chi, \\ U\cos\theta - V\sin\theta, & \text{»} \quad OZ, \\ W, & \text{»} \quad Oz. \end{cases}$$

Soient (*fig.* 56 *ter*)

Fig. 56 *ter*.



(A', a') un point infiniment voisin de (A, a);

Oχ' la direction de Oa';

Oz' la perpendiculaire en O à Oa' dans le plan XOY.

Le déplacement de (A', a') a pour composantes

$$\begin{array}{ll} U\sin\theta + V\cos\theta + d(U\sin\theta + V\cos\theta), & \text{suivant } O\chi', \\ U\cos\theta - V\sin\theta + d(U\cos\theta + V\sin\theta), & \text{»} \quad OZ, \\ W + dW, & \text{»} \quad Oz' \end{array}$$

ou

$$(a')\quad \begin{cases} U\sin\theta + V\cos\theta + d(U\sin\theta + V\cos\theta) - W\,d\psi, & \text{suivant } O\chi, \\ U\cos\theta - V\sin\theta + d(U\cos\theta - V\sin\theta), & \text{»} \quad OZ, \\ W + dW + (U\sin\theta + V\cos\theta)\,d\psi, & \text{»} \quad Oz. \end{cases}$$

Il résulte de (a), (a') que l'on a, pour le déplacement relatif de A′ par rapport à A,

$$(b)\quad \begin{cases} d\chi = d(\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta) - \mathrm{W}\,d\psi, & \text{suivant } \mathrm{O}\chi, \\ d\zeta = d(\mathrm{U}\cos\theta - \mathrm{V}\sin\theta), & \text{» } \mathrm{OZ}, \\ dw = d\mathrm{W} + (\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta)\,d\psi, & \text{» } \mathrm{O}z. \end{cases}$$

Si du, dv sont les projections du déplacement ci-dessus sur $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, on voit que (*fig.* 56 *bis*)

$$\begin{aligned} du &= d\chi\sin\theta + d\zeta\cos\theta = d\mathrm{U} - \mathrm{V}\,d\theta - \mathrm{W}\sin\theta\,d\psi, \\ dv &= d\chi\cos\theta - d\zeta\sin\theta = d\mathrm{V} + \mathrm{U}\,d\theta - \mathrm{W}\cos\theta\,d\psi, \\ dw &= d\mathrm{W} + (\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta)\,d\psi. \end{aligned}$$

Mais $dx = dr$, $dy = r\,d\theta$, $dz = r\sin\theta\,\psi$, par suite

$$(1)\quad \begin{cases} \delta_x = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = \delta_r, \quad \delta_y = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} + \dfrac{\mathrm{U}}{r} = \delta_m, \quad \delta_z = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial \psi} + \dfrac{1}{r}(\mathrm{U} + \mathrm{V}\cot\theta) = \delta_t, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} - \dfrac{\mathrm{V}}{r} = \gamma_{rm}, \\ \gamma_{zx} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \psi} - \dfrac{\mathrm{W}}{r} + \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial r} = \gamma_{tr}, \\ \gamma_{zy} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi} - \dfrac{\mathrm{W}}{r}\cot\theta = \gamma_{tm}. \end{cases}$$

On pourra donc exprimer $p_{rr} = p_{xx}$, $p_{mm} = p_{yy}$, $p_{tt} = p_{zz}$, $p_{rm} = p_{xy}$, $p_{mt} = p_{yz}$, $p_{tr} = p_{zx}$ en fonction de U, V, W.

§ II. — De la traction et de la compression.

144. *Traction d'un prisme* [1]. — Soient L, Ω la longueur et la section d'un prisme, censé vertical pour plus de simplicité, dont l'extrémité supérieure est rendue fixe, tandis que son autre extrémité est soumise à une traction uniforme dont Q est la résultante.

La pression sur la surface latérale est censée nulle. Nous

---

[1] Nous aurons occasion de nous servir de l'expression *axe d'un prisme*. Cet axe est le lieu géométrique des centres de gravité des sections droites.

prendrons pour Oz la verticale du centre de gravité O de la section fixe. Nous admettrons, sous toute réserve de justification ultérieure, qu'on a

$$0 = p_{xx} = p_{yy} = p_{xy} = p_{yz} = p_{zx}, \qquad p_{zz} = -\frac{Q}{\Omega}.$$

Les équations (1) du n° 131 où l'on devra faire $X = Y = Z = 0$ sont satisfaites, ainsi que l'équation (2) du n° 132 et celles qui en dérivent.

Les hypothèses $p_{xx} = 0$, $p_{yy} = 0$ reviennent à

$$(\lambda + 2\mu)\delta_x + \lambda(\delta_y + \delta_z) = 0, \qquad (\lambda + 2\mu)\delta_y + \lambda(\delta_z + \delta_x) = 0,$$

d'où

$$(a) \qquad \delta_x = \delta_y = -\frac{\lambda\,\delta_z}{2(\lambda + \mu)}.$$

Il y a donc une contraction latérale qui serait $\frac{1}{4}$ de δ_z pour les fils d'acier d'après les expériences de Cagniard-Latour, ce qui conduirait à l'égalité $\lambda = \mu$, à laquelle Poisson était parvenu, et qui est conforme aux expériences de M. Cornu sur le verre très homogène.

En exprimant que $p_{zz} = -\frac{Q}{\Omega}$, on obtient

$$(\lambda + 2\mu)\,\delta_z + \lambda(\delta_x + \delta_y) = \frac{Q}{\Omega},$$

et, en substituant la valeur ci-dessus commune à δ_x, δ_y,

$$Q = \mu\,\frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,\Omega\,\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les conditions $0 = p_{xy} = p_{yz} = p_{zz}$ sont satisfaites en admettant que u, v, w ne dépendent respectivement que de x, y, z; alors, si l est l'allongement de L, on a

$$Q = \mu\,\frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,\Omega\,\frac{l}{L} = E\Omega\,\frac{l}{L},$$

formule connue, dans laquelle E est la constante spécifique appelée *coefficient d'élasticité*.

Les formules (a), en y faisant $\delta_x = \frac{du}{dx}$, $\delta_y = \frac{dv}{dy}$, $\delta_z = \frac{Q}{E\Omega}$,

feront connaître u et v, en ne perdant pas de vue que ces déplacements sont respectivement nuls pour $x = 0$, $y = 0$.

La supposition de la répartition uniforme de Q sur la base libre du prisme n'est pas nécessaire; car, d'après l'expérience, les effets de la traction deviennent indépendants du mode d'application des forces extérieures à une très petite distance de leurs points d'application. On peut, par exemple, supposer que Q est un poids attaché à un crochet adapté au centre de gravité de la base libre.

Si $\frac{Q}{\Omega}$ atteint ou dépasse une certaine limite $\mathfrak{R}$, l'allongement ira en augmentant et bientôt la rupture se produira; mais, auparavant, si l'on supprimait la force Q, le prisme ne reprendrait plus sa forme primitive. Ainsi donc $\mathfrak{R}$ définit la limite de l'élasticité.

Dans les applications, pour obtenir une sécurité convenable et parer aux éventualités, on fait en sorte que $\frac{Q}{\Omega}$ atteigne au plus une valeur Γ dont les limites sont $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{10}$ de $\mathfrak{R}$.

On devra donc avoir

$$\frac{Q}{\Omega} \leqq \Gamma,$$

d'où une limite inférieure de Ω, qui sera d'ailleurs suffisante. C'est ce qui s'appelle la *détermination de l'équarrissage du prisme.*

La plus grande dilatation admissible sera

$$\delta_z = \frac{\Gamma}{E} \quad (^1).$$

La limite Γ a reçu le nom de *résistance de la matière.*

145. La théorie précédente s'applique à un prisme repo-

---

(1) Cette dilatation est toujours très petite; ainsi, pour l'acier, on a

$$E = 2 \times 10^{10},$$

et l'on prend

$$\Gamma = 8 \times 10^{8};$$

par suite

$$\delta = 0{,}0004.$$

sant par une base sur un plan horizontal, et dont la base reçoit une charge Q. La seule différence consiste en ce que les dilatations sont remplacées par des contractions.

§ III. -- De la torsion.

146. Revenons au prisme du n° **144**; mais, au lieu de supposer qu'il est soumis à un effort de traction, nous supposerons qu'il est sollicité par un couple dont le moment est $\mathfrak{M}$ situé dans le plan de la base libre.

La déformation produite par le couple a reçu le nom de *torsion*. Chaque section droite aura éprouvé un déplacement gyratoire autour de Oz et, généralement, ne sera pas resté plane. Ce déplacement est supposé proportionnel à la distance z de la section au point fixe O.

147. Nous ne traiterons que le cas simple d'un cylindre circulaire plein ou annulaire en renvoyant, pour la généralité et les autres exemples, à notre *Traité de Physique mathématique* (t. I, Chap. II).

Reportons-nous aux notations du n° **142**; d'après ce que nous avons dit plus haut, nous poserons, en désignant par m une constante inconnue,

$$V = mz.r,$$

et nous allons vérifier que, en admettant en outre que $o = U = W$, on satisfait aux conditions du problème. Les équations (2) du numéro précité nous donnent

$$o = p_{rr} = p_{tt} = p_{zz} = p_{zr} = p_{rt},$$

$$(1) \qquad p_{tz} = -\mu mr.$$

Les équations d'équilibre intérieur du n° **137**, en y faisant $O = R = T = Z$, sont satisfaites.

En nous reportant au n° **132**, nous supposerons, pour la surface latérale, que les axes Ox, Oy coïncident avec Or, Ot, et, en faisant $\alpha = o$, $\beta = \gamma = 90°$ dans la formule (2) de ce numéro et ses deux analogues, on trouve que la pression p' sur la surface est nulle, comme cela doit être.

Pour la base libre, on a

$$\mathfrak{M} + \int p_{tz} r \, d\omega = 0,$$

ou

$$\mathfrak{M} = m\mu \int r^2 d\omega = \frac{\pi}{2} m\mu (r_2^4 - r_1^4),$$

en désignant par r_2, r_1 les rayons extérieur et intérieur du cylindre censé annulaire pour plus de généralité. Cette équation fera connaître la constante m.

Il n'est pas nécessaire que les pressions élémentaires soient réparties sur la base libre suivant la loi qu'exprime la formule (1); car les effets de la torsion deviennent indépendants du mode de distribution des forces extérieures à une très petite distance de leurs points d'application, et ne dépendent en définitive que du moment de torsion $\mathfrak{M}$.

§ IV. — De la flexion.

148. La déformation d'un prisme produite par des forces extérieures, dans laquelle l'axe du prisme ne reste pas rectiligne, a reçu le nom de *flexion*.

La position d'un prisme peut être déterminée par des appuis qu'on suppose réduits à des couteaux ou par des *encastrements*. Un encastrement consiste dans un système de solides limité à une section droite qui, au point correspondant, rend invariable la tangente à l'axe déformé du prisme; généralement, on le considère comme formé de deux couteaux très voisins l'un de l'autre, dont les tranchants touchent respectivement deux faces opposées du prisme.

On voit que, en général, les réactions des couteaux sur le prisme donneront lieu à une résultante et à un couple.

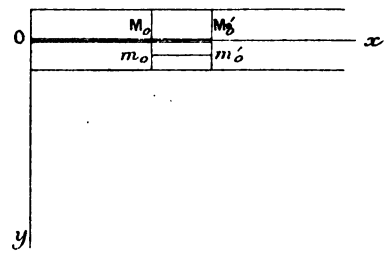
Nous ne considérons que le cas où le prisme est sollicité par des forces comprises dans un plan de symétrie du prisme. Ce plan, dit de *flexion*, renfermera l'axe déformé du prisme.

En réduisant le problème au cas très particulier d'une seule force agissant à une extrémité d'un prisme encastré d'autre part, supposant de plus la flexion très faible et que la force est perpendiculaire à l'axe non déformé du prisme, la théorie ma-

thématique de l'élasticité ne conduit à des résultats que pour un nombre très restreint de formes de la section droite [1]; aussi nous bornerons-nous ici à exposer les règles établies dans l'ancienne théorie de l'élasticité qui porte maintenant le nom de *résistance des matériaux*.

149. Soient (*fig.* 57)

Fig. 57.



Ox l'axe du prisme à l'état naturel;
yOx un plan de symétrie;
Ω la section droite et I son moment d'inertie par rapport à la perpendiculaire au plan yOx passant par le centre de gravité de la section.

On considère le prisme comme composé de files de molécules ou fibres parallèles à Ox. La file suivant cet axe a reçu le nom de *fibre moyenne*.

Soient encore

M_0, M'_0 deux points consécutifs de la fibre moyenne;
$\overline{m_0 m'_0}$ un élément d'une fibre dont $d\omega$ est la section, limité par les sections Ω en M_0, M'_0 et projeté sur le plan yOx.
$\eta = \overline{m_0 M_0}$.

Sous l'action de forces comprises dans le plan yOx, la fibre moyenne se déformera en restant comprise dans ce plan; les éléments $M_0M'_0$, $m_0m'_0$ viendront en MM', mm' (*fig.* 57 *bis*).

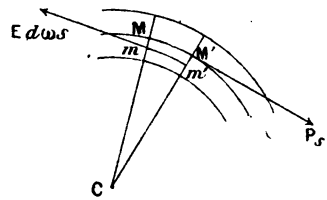
On admet que, après la déformation : 1° les fibres restent

---

[1] *Voir* le Chap. II, § VI, de notre *Traité de Physique mathématique*.

parallèles; 2° les sections matérielles Ω sont restées planes sans que leur forme se soit altérée, et qu'elles sont restées normales aux fibres, d'où $\overline{Mm} = \eta$.

Fig. 57 *bis*.



Désignons par C le centre de courbure et par $\rho = \overline{CM}$ le rayon de courbure de la fibre moyenne en M. (La perpendiculaire en C au plan yOx a reçu le nom d'*axe de flexion*.)

On assimile $\overline{m_0 m'_0}$ à un prisme qui, pour se transformer en mm', a été soumis à la traction positive ou négative $E\delta d\omega$, en posant

$$\delta = \frac{\overline{mm'} - \overline{m_0 m'_0}}{\overline{m_0 m'_0}} = \frac{\overline{mm'} - \overline{M_0 M'_0}}{\overline{M_0 M'_0}}.$$

Or

$$\overline{mm'} = \overline{MM'}\,\frac{\rho - \eta}{\rho};$$

par suite

$$\delta = \delta_0 - \frac{\eta}{\rho},$$

en désignant par $\delta_0 = \dfrac{\overline{MM'} - \overline{M_0 M'_0}}{\overline{M_0 M'_0}}$ la dilatation de la fibre moyenne en M.

Transportons parallèlement à elles-mêmes en M les forces extérieures qui sollicitent la portion $M_0 x$ du prisme; il en résultera un couple (dit *fléchissant*) dont le moment sera représenté par $\mathfrak{M}$ et une force P dont la composante, suivant MM', sera désignée par P_s. Nous aurons aussi

$$P_s - E\int\left(\delta_0 - \frac{\eta}{\rho}\right) d\omega = 0, \qquad \mathfrak{M} + E\int\left(\delta_0 - \frac{\eta}{\rho}\right)\eta\, d\omega = 0,$$

d'où

$$P_s = E\Omega\,\delta_0, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{EI}{\rho}. \tag{2}$$

150. Ces deux équations s'appliquent à des flexions quelconques, mais qui, dans les applications, sont toujours très petites. Aussi nous bornerons-nous à traiter la question suivante, qui se rapporte à une flexion quelconque.

Un prisme horizontal, dont la longueur est l, est encastré en O, et l'on adapte à son extrémité libre A un poids Q sous l'action duquel la fibre moyenne prend la forme OA (*ligne élastique*) qu'il s'agit de déterminer.

Soient

x, y les coordonnées d'un point quelconque m de OA, où la tangente est inclinée de l'angle θ sur Ox;
s l'arc Om;
x_1, y_1, θ_1 les valeurs de x, y, θ qui se rapportent à A.

On a

$$\frac{EI}{\rho} = Q(x_1 - x)$$

ou

$$EI\frac{d\theta}{ds} = Q(x_1 - x).$$

On déduit de là

$$EI\frac{d^2\theta}{ds^2} = -Q\cos\theta,$$

d'où, en multipliant par $d\theta$ et intégrant,

$$\frac{1}{2}EI\frac{d\theta^2}{ds^2} = -Q\sin\theta + \text{const.}$$

Mais $\frac{d\theta}{ds}$ est nul pour $x = x_1$ ou $\theta = \theta_1$, par suite

$$\frac{1}{2}EI\frac{d\theta^2}{ds^2} = Q(\sin\theta_1 - \sin\theta).$$

On déduit de là

$$s = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_0^\theta \frac{d}{\sqrt{\sin\theta_1 - \sin\theta}}.$$

La longueur de OA ne diffère de l que d'une quantité de l'ordre de δ qu'on peut négliger, de sorte que l'on a

$$l = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_1 - \sin\theta}}$$

et enfin

$$x = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_0 \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin\theta_1 - \sin\theta}} = \sqrt{\frac{2EI}{Q}} \left(\sqrt{\sin\theta_1} - \sqrt{\sin\theta_1 - \sin\theta}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_0^\theta \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin\theta_1 - \sin\theta}}.$$

151. Supposons que la flexion d'un prisme soit assez faible pour qu'on puisse négliger $\frac{dy^2}{dx^2}$ devant l'unité ; nous aurons $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Nous pourrons estimer P_s et $\mathfrak{M}$ en faisant abstraction de la déformation, de sorte que les équations (1) et (2) du n° 149 deviennent

$$E\Omega\delta_0 = P_x, \tag{3}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}. \tag{4}$$

Si le prisme n'est sollicité que par des forces perpendiculaires à Ox, on a $P_x = 0$, $\delta_0 = 0$. La fibre moyenne n'a pas varié en longueur et, pour ce motif, on lui donne quelquefois le nom d'*axe neutre*.

Applications. — 1° *Un prisme dont la longueur est* $2l$ *repose par ses extrémités* A, A′ *sur deux appuis de niveau et est soumis en son milieu à l'action d'un poids* Q.

Soient C le milieu de la fibre moyenne déformée pris pour origine des coordonnées; Cy la verticale de ce point dirigée en sens inverse de la pesanteur.

Pour l'arc CA nous dirigerons Cx du côté de l'appui A; la réaction de l'appui A étant évidemment $\frac{Q}{2}$, nous avons

$$(a) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{2}(l-x);$$

mais, en raison de la symétrie, la tangente en C est horizontale; on a donc, en intégrant

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2}\left(l-\frac{x}{2}\right)x,$$

$$(b) \qquad EIy = \frac{Q}{2}\left(l-\frac{x}{3}\right)\frac{x^2}{2}.$$

L'équation (a) peut s'écrire

$$\frac{I}{\rho} = \frac{Q}{2}\frac{l-x}{EI},$$

et si l'on désigne par e^2 pour Ω la plus grande valeur de η^2, la plus grande dilatation dans la section répondant à x sera

$$e\frac{Q}{2}\frac{l-x}{EI},$$

et, en faisant varier x, sa plus grande valeur sera $e\frac{Q}{2}\frac{l}{EI}$, qu'on devra égaler à $\frac{\Gamma}{E}$ pour obtenir l'équarrissage. On aura donc

$$e\frac{Q}{2}\frac{l}{I} = \Gamma.$$

Supposons, comme exemple, que la section soit un rectangle dont la base est b; on a $I = \frac{2}{3}be^3$, par suite

$$\frac{3}{4}Q\frac{l}{be^2} = \Gamma;$$

d'où l'une des dimensions b et $2e$ lorsqu'on se donnera l'autre.

La *flèche* ou la valeur de y pour $x = l$ est

$$f = \frac{Ql^3}{6EI}.$$

2° Supposons que le même prisme, au lieu d'être sollicité par le poids Q, reçoive une charge proportionnelle aux éléments dx de la fibre moyenne, et désignons par p la charge par unité de longueur; nous conserverons les axes coordonnés ci-dessus. La réaction de chaque appui étant pl, nous avons

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = pl(l+x) - p(l-x)\frac{(l-x)}{2} = \frac{p}{2}(l^2 - x^2),$$

d'où

$$\mathrm{EI}\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right)x,$$

$$\mathrm{EI}y = \frac{p}{4}\left(l^2 - \frac{x^2}{6}\right)x^2.$$

Nous en resterons à ces deux exemples, en renvoyant, pour plus de détails, au Tome V de cet Ouvrage.

§ V. — Enveloppes cylindriques.

152. Soient r_0, r_1 les rayons intérieur et extérieur d'un tube dont les parois intérieure et extérieure sont soumises aux pressions normales constantes $P_0 > P_1$. Le tube est fermé à ses extrémités par deux fonds identiques, plans ou de révolution autour de son axe Oz, de manière que toute section soit soumise à une traction uniforme F. De la relation évidente

$$(\pi r_1^2 - \pi r_0^2)F = P_0 \pi r_0^2 - P_1 \pi r_1^2.$$

on tire

$$(1) \qquad F = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Nous nous reporterons maintenant aux nos 137 et 142. Les molécules du tube situées, avant la déformation, dans un plan méridien restant comprises dans ce plan quand elle s'est produite, on a $V = 0$; d'ailleurs U, W sont indépendants de ψ. Nous admettrons que U est uniquement fonction de r et W de z. Les pressions tangentielles sont alors nulles et

nous avons (n° 142)

$$(2)\quad \begin{cases} p_{rr} = -\left[(\lambda + 2\mu)\dfrac{dU}{dr} + \lambda\dfrac{U}{r} + \lambda\dfrac{dW}{dz}\right], \\ p_{tt} = -\left[\lambda\dfrac{dU}{dr} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{U}{r} + \lambda\dfrac{dW}{dz}\right], \\ p_{zz} = -\left[\lambda\dfrac{dU}{dr} + \lambda\dfrac{U}{r} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{dW}{dz}\right]. \end{cases}$$

Les équations de l'équilibre intérieur (n° 137) se réduisent aux suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \dfrac{p_{rr} - p_{tt}}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

La seconde de ces équations revient à $\dfrac{d^2W}{dz^2}$, d'où, en plaçant l'origine O au milieu de l'axe du tube et désignant par C une constante,

$$(4)\qquad W = Cz.$$

La première des équations (3), eu égard aux deux premières des valeurs (2), donne

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0$$

ou

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{d\dfrac{U}{r}}{dr} = 0.$$

On déduit successivement de cette dernière équation, en désignant par A et B deux constantes,

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = 2A \qquad \text{ou} \qquad \frac{drU}{dr} = 2Ar.$$

$$(5)\qquad U = Ar + \frac{B}{r}.$$

En substituant les valeurs (4) et (5) dans les formules (2),

on trouve

$$(2')\quad \begin{cases} p_{rr} = -\left[2(\lambda+\mu)A - 2\mu\dfrac{B}{r^2} + \lambda C\right], \\ p_{tt} = -\left[2(\lambda+\mu)A + 2\mu\dfrac{B}{r^2} + \lambda C\right], \\ p_{zz} = -[2\lambda A + (\lambda+2\mu)C]. \end{cases}$$

S'il s'agit d'un cylindre plein soumis à une pression extérieure P_1, il faut que $B = 0$ pour que U ne soit pas infini pour $r = 0$, condition qui remplace celle qui se rapporte à P_0.

Comme la pression p_{zz} est constante, elle est égale à $-F$, ou

$$p_{zz} = -\frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Si l'on exprime, en se reportant aux valeurs (2'), que $p_{rr} = P_0$ pour $r = r_0$, $p_{rr} = P_1$ pour $r = r_1$ et que p_{zz} a la valeur ci-dessus, on trouve

$$(6)\quad B = \frac{r_0^2 r_1^2 (P_0 - P_1)}{2\mu(r_1^2 - r_0^2)} > 0, \quad A = C = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} > 0.$$

On a aussi

$$(7)\quad \delta_r = \frac{\partial U}{dr} = A - \frac{B}{r^2}, \qquad \delta_t = \frac{U}{r} = A + \frac{B}{r^2}, \qquad \delta_z = C.$$

Pour une même valeur de r on a $\delta_t > \delta_r$; le maximum de δ_t répond à $r = r_0$ et a pour valeur

$$(8)\quad \delta'_t = \frac{1}{r_1^2 - r_0^2}\left[\frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{3\lambda + 2\mu} + \frac{(P_0 - P_1) r_1^2}{2\mu}\right].$$

Supposons que l'épaisseur $e = r_1 - r_0$ soit assez petite pour que nous puissions en négliger le carré; nous avons $r_1^2 = r_0^2 + 2 r_0 e$ et

$$(8')\quad \delta'_t = \frac{(3\lambda + 4\mu)(P_0 - P_1) r_0}{4\mu(3\lambda + 2\mu) e}.$$

Pour déterminer e, nous poserons

$$\delta'_t = \frac{\Gamma}{E} = \frac{(\lambda+\mu)\Gamma}{(3\lambda + 2\mu)\mu},$$

d'où, vu (8'),

$$(9) \qquad e = \frac{(3\lambda + 4\mu)(P_0 - P_1)r_0}{4\Gamma(\lambda + \mu)}.$$

En prenant $\lambda = \mu$, il vient

$$e = \frac{7}{8}\frac{(P_0 - P_1)r_0}{\Gamma}.$$

La formule pratique

$$e = \frac{(P_0 - P_1)r_0}{\Gamma},$$

adoptée pour les chaudières à vapeur, offre encore plus de sécurité que la précédente.

§ VI. — Plaques circulaires.

153. La position d'une plaque sera définie soit par un encastrement suivant son périmètre soit par un appui de ce périmètre sur l'une des bases d'un cylindre creux.

Les deux faces sont respectivement soumises aux pressions normales constantes $P_0 > P_1$.

Soient

R le rayon et $e' = 2\varepsilon$ le rayon et l'épaisseur de la plaque;

$P = P_0 - P_1$ la *pression effective;*

xOy le plan moyen de la plaque et O le centre de la section qu'il détermine;

Oz la partie de l'axe de la plaque située dans le milieu qui produit la pression P_1.

Il faut se reporter aux nos 137 et 142. On a $V = 0$ et U, W sont indépendants de ψ; par suite,

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta_r = \dfrac{\partial U}{\partial r}, & \delta_t = \dfrac{U}{r}, & \delta_z = \dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ \gamma_{rz} = \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial r}, & \gamma_{rt} = 0, & \gamma_{rz} = 0, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} p_{rr} = -[(\lambda + 2\mu)\delta_r + \lambda(\delta_t + \delta_z)], \\ p_{tt} = -[(\lambda + 2\mu)\delta_t + \lambda(\delta_r + \delta_z)], \\ p_{zz} = -[(\lambda + 2\mu)\delta_z + \lambda(\delta_r + \delta_t)], \\ p_{rz} = -\mu\gamma_{rz}, \quad p_{tr} = 0, \quad p_{tz} = 0. \end{cases}$$

Les équations de l'équilibre intérieur se réduisent à celles-ci :

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r p_{rr}}{\partial r} - p_{tt}\right) + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{p_{rz}}{r} = 0. \end{cases}$$

Considérons la section faite dans la plaque par un cylindre dont r et Oz sont le rayon et l'axe. Les réactions élémentaires dans la section, dues aux $-p_{rz}$, faisant équilibre à $(P_0 - P_1)\pi r^2 = P\pi r^2$, on a

$$-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2\pi r\, dz\, p_{rz} + P\pi r^2 = 0$$

ou

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_{rz}\, dz = \frac{Pr}{2}.$$

En intégrant par parties et remarquant que $(z p_{rz})_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0$, on obtient

$$-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} z \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} dz = \frac{Pr}{2},$$

relation qui peut d'ailleurs se déduire des équations (3).

Si l'on remplace $\frac{\partial p_{rz}}{\partial z}$ par sa valeur déduite de la première de ces équations, on trouve

$$(4)\qquad -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial r p_{rr}}{\partial r} - p_{tt}\right) z\, dz = -P\frac{r^2}{2}.$$

Nous avons maintenant, eu égard aux valeurs (2),

$$-\left(\frac{\partial r p_{rr}}{\partial r} - p_{tt}\right) = -(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial r\,\delta_r}{\partial r} - \delta_t\right) + \lambda r \frac{\partial \delta_z}{\partial r} + \lambda\left(r\frac{\partial \delta_t}{\partial r} + \delta_t - \delta_r\right);$$

mais, en vertu des valeurs (1), le troisième terme de cette expression est identiquement nul, et l'équation (4) se réduit

à la suivante

$$(5)\quad (\lambda+2\mu)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial_r\delta_r}{\partial r}-\delta_t\right)z\,dz+\lambda r\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial\delta_z}{\partial r}z\,dz=-\mathrm{P}\frac{r^2}{2}.$$

Pour aller plus loin nous sommes obligé d'avoir recours à des hypothèses analogues à celles qui servent de base à la résistance des matériaux. Nous considérerons la plaque à l'état naturel comme composée de feuillets infiniment minces parallèles aux faces; le feuillet compris dans le plan xOy sera le *feuillet moyen*. Nous admettrons que, après la déformation, l'épaisseur de la plaque n'a pas varié sensiblement ou que $\delta_z=0$ (¹). Nous supposerons que la section faite, dans la plaque à l'état naturel, par un cylindre circulaire dont Oz est l'axe, s'est transformée après la déformation en une surface conique normale au feuillet déformé; enfin, nous négligerons la dilatation radiale, nécessairement très petite, du feuillet moyen.

Cela posé, soient

ρ le rayon de courbure, en un point m, de la section méridienne du feuillet moyen déformé;

W_0 la valeur de W pour ce point ou l'ordonnée de m, parallèle à Oz;

$\zeta=\frac{dW_0}{dr}$ le coefficient angulaire de la tangente en m, dont on négligera le carré.

Comme ζ diminue quand r croît, on devra prendre $\frac{1}{\rho}=-\frac{d\zeta}{dr}$.

Par un raisonnement identique à celui du n° 149, on est conduit à poser

$$(6)\qquad \delta_r=\frac{z}{\rho}=-z\frac{d\zeta}{dr},$$

(¹) Ce qui est conforme au résultat donné par une expérience que nous avons faite vers 1865 à l'atelier de construction de Casamène. Une feuille de tôle, boulonnée sur le bord d'un cylindre en fonte, a été soumise, au moyen d'une pompe foulante, à une pression assez forte pour produire une déformation permanente.

ce qui revient à

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -z\frac{d\zeta}{dr},$$

d'où

$$U = -z\zeta,$$

en remarquant que U est nul, en même temps que ζ, pour $r = 0$.

Nous prendrons donc

$$(6') \qquad \delta_t = \frac{U}{r} = -z\frac{\zeta}{r},$$

et nous aurons donc, en vertu des valeurs (6) et (6'),

$$\frac{\partial r\delta_r}{\partial r} - \delta_t = -z\left(r\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr} - \frac{\zeta}{r}\right) = -zr\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} - \frac{\zeta}{r^2}\right)$$

$$= -zr\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{d\frac{\zeta}{r}}{dr}\right) = -zr\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\zeta}{dr}.$$

L'équation (5) devient, par suite, après avoir effectué l'intégration par rapport à z,

$$\frac{2}{3}(\lambda + 2\mu)\varepsilon^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\zeta}{dr} = P\frac{r}{2},$$

d'où, en désignant par C une constante,

$$\frac{2}{3}(\lambda + 2\mu)\frac{\varepsilon^2}{r}\frac{dr\zeta}{dr} = P\left(\frac{r^2}{4} + C\right),$$

et, par une seconde intégration,

$$\frac{2}{3}\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)r\zeta = P\left(\frac{r^4}{16} + C\frac{r^2}{2}\right),$$

sans introduire de constante pour que ζ ne soit pas infini pour $r = 0$, et il sera alors nul pour cette valeur de r, comme cela devait être.

L'équation précédente revient à celle-ci

$$(7) \qquad \frac{2}{3}\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)\frac{dW_0}{dr} = P\left(\frac{r^3}{16} + \frac{Cr}{2}\right).$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer :

1° *La plaque est encastrée sur son pourtour.*

On doit avoir $\frac{dW_0}{dr} = 0$ pour $r = R$, par suite

$$\frac{dW_0}{dr} = \frac{3}{2}\frac{Pr}{\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)}\frac{1}{16}(r^2 - R^2).$$

On déduira de là W_0, en exprimant que ce déplacement est nul pour $r = R$.

En se reportant à la formule (6), la plus grande valeur absolue de δ_r pour r constant est

$$\pm\varepsilon\frac{d^2W_0}{dr^2} = \pm\frac{3P}{2\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)}\frac{1}{16}(3r^2 - R^2);$$

en faisant ensuite varier r, elle répond à $r = R$ et a pour valeur

$$\delta'_r = \frac{3P}{2\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)}\frac{R^2}{8}.$$

D'après la formule (6'), on voit que la plus grande valeur absolue de δ_t répond à $z = \pm\varepsilon$, $r = 0$; mais, comme elle n'est que la moitié de δ'_r, il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

D'après ce qu'on a vu pour les enveloppes cylindriques, on a, pour la condition de résistance,

$$\mu\frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\delta'_r = \Gamma;$$

par suite, en supposant $\lambda = \mu$ et remplaçant ε par $\frac{e'}{2}$,

$$(8) \qquad e' = 0{,}791\sqrt{\frac{PR^2}{\Gamma}} = 0{,}791\sqrt{Re} \quad (^1),$$

e étant l'épaisseur que doit avoir une enveloppe cylindrique de rayon R soumise à la pression effective P.

2° *La plaque repose suivant son pourtour sur un tube.* — Nous avons à exprimer que $p_{rr} = 0$ pour $r = R$. En conti-

(1) Cette formule est notamment applicable aux fonds plats des appareils à vapeur. L'ajustage d'un fond, déterminé par des boulons ou des rivets, détruit les pressions élémentaires dues aux p_{rr}. Il y a donc une différence entre la définition du mode d'encastrement en question et celle des prismes, sur laquelle il nous paraît inutile d'insister.

nuant à prendre $\lambda = \mu$, on a, en ayant égard à la valeur (7),

$$p_{rr} = -\lambda(3\delta_r + \delta_t) = z\lambda\left(3\frac{d^2W_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_0}{dr}\right) = \frac{Pz}{2\varepsilon^3\lambda}\left(\frac{5r^2}{8} + 2C\right),$$

d'où $C = -\frac{5}{16}R^2$; la formule (7) donne alors

$$\frac{1}{r}\frac{dW_0}{dr} = \frac{P}{2\varepsilon^3\lambda}\frac{1}{16}\left(r^2 - \frac{5}{8}R^2\right),$$

$$\frac{d^2W_0}{dr^2} = \frac{P}{2\varepsilon^3\lambda}\frac{1}{16}\left(3r^2 - \frac{5}{8}R^2\right).$$

Les maximum des valeurs absolues de ces deux expressions répondent à $r = 0$ et comme ils sont égaux, on posera

$$\delta'_r = \frac{P}{2\varepsilon^3\lambda}\frac{1}{16}\frac{5}{2}R^2,$$

par suite

$$(8') \qquad e' = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{8}\frac{PR^2}{\Gamma}} = 0{,}884\sqrt{Re}.$$

En comparant entre elles les valeurs (8) et (8'), on voit que l'encastrement a pour effet de réduire l'épaisseur.

§ VII. — Enveloppes sphériques.

154. Soient

r_0, r_1 les rayons intérieur et extérieur de l'enveloppe;
$P_0 > P_1$ les pressions normales constantes exercées respectivement sur les surfaces intérieure et extérieure de l'enveloppe.

On se reportera au n° 143, dans lequel on fera $R = 0$, $T = 0$, $Z = 0$. On devra avoir $V = 0$, $U = 0$, et U ne devra dépendre que de r. On aura, par suite,

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{dU}{dr} + 2\dfrac{U}{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr^2U}{dr}, \\ p_{rr} = -\left(\lambda\Delta + 2\mu\dfrac{dU}{dr}\right), \qquad p_{mm} = p_{tt} = -\left(\lambda\Delta + 2\mu\dfrac{U}{r}\right) \end{cases}$$

et de plus $0 = p_{rt} = p_{tm} = p_{mr}$.

Concevons dans la masse une moitié d'enveloppe sphérique dont les rayons sont r, $r+dr$. Nous aurons

$$\pi r^2 p_{rr} - \pi\left(r^2 p_{rr} + \frac{d}{dr} r^2 p_{rr} dr\right) + 2\pi r dr p_{mm} = 0,$$

d'où

$$\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(p_{rr} - p_{mm}) = 0$$

ou, en substituant à p_{rr}, p_{mm} leurs valeurs (1),

$$\lambda \frac{d\Delta}{dr} + 2\mu\left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\frac{dU}{dr}}{r}\right) = 0;$$

ce qui revient à

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Delta}{dr} = 0.$$

La dilatation cubique est donc constante et, en la désignant par 3A, la première des formules (1) donne

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2 U}{dr} = 3A,$$

d'où, B étant une autre constante,

$$U = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

Nous avons alors

$$p_{rr} = -\left[(3\lambda + 2\mu)A - \frac{4\mu B}{r^3}\right],$$

$$p_{mm} = -\left[(3\lambda + 2\mu)A + \frac{2\mu B}{r^3}\right].$$

En exprimant que $p_{rr} = P_0$ pour $r = r_0$ et $p_{rr} = P_1$ pour $r = r_1$, on trouve

$$A = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{(3\lambda + 2\mu)(r_1^3 - r_0^3)}, \qquad B = \frac{(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{4\mu(r_1^3 - r_0^3)}.$$

On admettra que $P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3 > 0$. La plus grande valeur de $\delta_t = \frac{U}{r}$ est supérieure à celle de $\delta_r = \frac{dU}{dr}$, et répond à $r = r_0$;

on a pour cette valeur

$$\delta'_i = \frac{\Gamma_0 r_0^3 - P_0 r_1^3}{(3\lambda + 2\mu)(r_1^3 - r_0^3)} + \frac{(P_0 - P_1) r_1^3}{4\mu(r_1^2 - r_0^2)}.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut, on devra l'égaler à

$$\frac{\Gamma(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Si l'épaisseur $e = r_1 - r_0$ est assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré, on a

$$\frac{(P_0 - P_1) r_0}{24 e}(9\lambda + 14\mu) = \Gamma(\lambda + \mu)$$

et, en prenant $\lambda = \mu$,

$$e = \frac{23}{48}(P_0 - P_1)\frac{r_0}{\Gamma};$$

ce qui diffère peu de la formule pratique

$$e = (P_0 - P_1)\frac{r_0}{2\Gamma}.$$

CHAPITRE XIII.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES (HYDROSTATIQUE).

155. *Généralités.* — Un fluide est un système matériel dont les molécules peuvent se déplacer sous le moindre effort. D'après l'expérience, la pression sur un élément plan compris dans la masse d'un fluide en repos est normale à cet élément.

Dans les équations de l'équilibre intérieur des corps, on devra donc supposer

$$p_{xx} = p_x, \qquad p_{yy} = p_y, \qquad p_{zz} = p_z, \qquad 0 = p_{xy} = p_{yz} = p_{zx}.$$

D'après le n° 132, on a $p'_x = p_x \cos\alpha$; mais $p'_x = p' \cos\alpha$. D'où $p' = p_x$, ce qui exprime que la pression est égale en tous sens; ce qui constituait le principe expérimental de Pascal, qui se trouve ainsi supprimé.

Les équations du n° 131 deviennent, en supprimant les indices des pressions,

$$(1) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z,$$

d'où

$$(2) \qquad dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Il faut donc, pour que l'équilibre ait lieu, que le second membre de l'équation (2) soit une différentielle exacte.

En désignant par θ la température, la relation qui définit la nature du fluide sera de la forme

$$(3) \qquad F(p, \rho, \theta) = 0.$$

Si, X, Y, Z, θ sont des fonctions données de x, y, z, les

équations (2), (3) feront connaître p et ρ en fonction des coordonnées.

En supposant que la température reste constante, l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\rho = \varphi(p),$$

et l'équation (2) donne

$$\frac{dp}{\varphi(p)} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Ce qui exige que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit une différentielle exacte, soit

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\Psi(x, y, z).$$

Pour les liquides, dont la compressibilité peut être négligée, on peut supposer ρ constant, par suite p constant.

Pour les gaz maintenus à température constante, on peut écrire $p = k\rho$, en désignant par k une constante donnée. On a alors

$$dp = \frac{p}{k}\,d\Psi,$$

d'où, C étant une constante arbitraire,

$$p = Ce^{\frac{\Psi}{k}}, \qquad \rho = \frac{1}{k}\,Ce^{\frac{\Psi}{k}}.$$

On désigne sous le nom de *surface de niveau* tout lieu de points où la pression a la même valeur. La famille des surfaces de niveau est définie par

$$(4) \qquad \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0,$$

d'où, pour leur équation générale,

$$(5) \qquad \int \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \text{const}.$$

L'équation (4) revient à

$$(6) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

ce qui exprime que la force extérieure en un point est normale à la surface de niveau passant par ce point.

Si le premier membre de l'équation (6) est une différen-

tielle exacte, cette équation sera l'équation différentielle des surfaces de niveau; s'il en est autrement, ρ sera le facteur d'intégrabilité de l'équation (4).

Pour obtenir les équations d'équilibre d'un fluide en coordonnées cylindriques, il suffit de supposer $p_{rt}=p_{tr}=p_{zr}=0$, $p_{rr}=p_{tt}=p_{zz}=p$ dans celles du n° 137, ce qui donne

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho R, \qquad \frac{\partial p}{r\,\partial\psi}=\rho T, \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z.$$

156. *Des fluides pesants.* — Considérons une masse fluide d'une étendue assez restreinte pour que, en chacun de ses points, l'accélération g de la pesanteur puisse être considérée comme constante en grandeur et en direction.

Soient

O un point du lieu où l'on se trouve et qu'on peut fixer arbitrairement;
Oz la direction de la pesanteur;
xOy le plan horizontal en O.

On a $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, $\frac{\partial p}{\partial x}=0$, $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, puis

$$\frac{dp}{dz}=\rho g,$$

$$p=\int\rho g\,dz.$$

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

Soit p_0 la pression sur le plan de niveau xOy, qui sera, si l'on veut, la surface libre s'il s'agit d'un liquide. On a

$$p=p_0+\int_0^z \rho g\,dz,$$

expression dans laquelle l'intégrale représente le poids d'un prisme vertical dont la base, égale à l'unité, passe par le point considéré.

Pour un liquide, on a

$$p=p_0+\rho gz.$$

Dans le cas d'un gaz à température constante, on a $\rho=\frac{p}{p_0}\rho_0$,

puis

$$dp = p\frac{g\rho_0\,dz}{p_0},$$

d'où

$$p = p_0 e^{\frac{g\rho_0 z}{p_0}}.$$

157. *Résultante des pressions élémentaires d'un fluide pesant sur un corps qui y est plongé.* — Supposons la surface du corps décomposée en éléments par des cylindres infinitésimaux parallèles à une direction horizontale, et soit $d\omega$ la section de l'un de ces cylindres. Les composantes horizontales des pressions sur les troncatures étant $p\,d\omega$, $-p\,d\omega$, $+\ldots$, $-p\,d\omega$ se détruisent. Les pressions élémentaires ne donneront donc pas de composantes horizontales.

Concevons maintenant que la surface soit divisée par des prismes verticaux élémentaires. Pour un prisme, la résultante des pressions verticales en allant de bas en haut sera

$$g(-\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2 - \rho_3 z_3 - \ldots + \rho_n z_n)\,d\omega,$$

ou le poids du fluide déplacé.

Donc les pressions élémentaires sur le corps se réduisent à une force verticale, agissant de bas en haut, égale au poids de la masse du fluide déplacé et passant par le centre de gravité de cette masse (principe d'Archimède).

158. *Résultante des pressions exercées par un liquide pesant sur une paroi plane.* — Nous ferons abstraction de la pression atmosphérique p_0 qui, s'exerçant également sur les deux faces de la paroi, ne donne pas de résultat.

Soient

Oy la trace du plan de la paroi sur la surface libre xOy;
Ox' une perpendiculaire à Oy dans le plan de la paroi;
α l'inclinaison de ce plan sur l'horizon;
x', y, $z = x'\sin\alpha$, $x = x'\cos\alpha$ les coordonnées d'un élément superficiel $d\omega$ de l'aire Ω de la paroi;
z_1, x'_1 les coordonnées du centre de gravité de Ω parallèle à Oz, Ox';

$I = \int x'^2 d\omega$ le moment d'inertie de cette aire par rapport à Oy.

La résultante des pressions est

$$P = \int \rho g z \, d\omega = \rho g \Omega z_1 = \rho g \Omega x'_1 \sin\alpha$$

et est égale au poids du prisme vertical ayant pour base Ω et z_1 pour hauteur.

Soient χ', η les coordonnées parallèles à Ox', Oy du point d'application de P, appelé *centre de pression;* on a, en prenant successivement les moments par rapport à Ox', Oy,

$$P\eta = \int g \rho z \, d\omega y = \rho g \sin\alpha \int x' y \, d\omega,$$
$$P\chi' = \int g \rho z \, d\omega x' = \rho g I \sin\alpha,$$

d'où

$$\eta = \frac{\int x' y \, d\omega}{\Omega x'_1}, \qquad \chi' = \frac{I}{\Omega x'_1}.$$

Si Ox', par suite Oy, est un axe principal d'inertie de Ω, on a $\eta = 0$, et le centre de pression se trouve sur Ox'.

Comme exemple, considérons le cas où Ω est un rectangle dont un côté $2b$ coïncide avec Oy et soit O le milieu de ce côté; si $2a$ désigne l'autre côté, on a

$$I = 16\frac{ba^3}{3}, \qquad \Omega = 4ab, \qquad x'_1 = a,$$

et enfin

$$\chi' = \frac{2}{3} 2a,$$

ce qu'il est facile de traduire en langage ordinaire.

159. *Résultante des pressions sur une paroi cylindrique dont les génératrices sont horizontales.* — Il suffit de considérer un tronçon dont la longueur est l'unité ou simplement la section droite. Soient

O l'intersection du profil avec le plan de niveau;
$z = f(x)$ l'équation de cette ligne;

a, c les coordonnées parallèles à Ox et Oz de l'extrémité inférieure du profil.

On a

$$P_x = -\rho g \int_0^c z\,dz = -\rho \frac{gc^2}{2}, \qquad P_z = \rho g \int_0^a z\,dx.$$

Si χ, ζ sont les coordonnées, parallèles à Ox, Oz, de l'intersection de la direction de P avec le profil, à laquelle nous continuerons à donner le centre de pression, nous aurons, en prenant les moments par rapport au point O,

$$\chi P_z - \zeta P_z = \rho g \left(\int_0^a xz\,dx + \int_0^c z^2\,dz \right) = \rho g \left(\int_0^a xz\,dx + \frac{c^3}{3} \right).$$

Cette équation, jointe aux précédentes et à la relation $\zeta = f(\chi)$, permettra de déterminer χ et ζ. Cette solution peut être utile dans l'établissement de certains réservoirs.

160. *De l'équilibre relatif d'une masse liquide pesante animée d'une rotation uniforme ω autour d'un axe Oz dirigé en sens inverse de la pesanteur.* — La surface étant de révolution, il suffit de considérer une section méridienne zOx; la seule force apparente étant la force centrifuge, nous avons $\omega^2 x\,dx - g\,dz = 0$, d'où, pour l'équation des lignes de niveau,

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} - gz = \text{const.C}.$$

Une surface de niveau est ainsi une parabole; on arrive géométriquement à cette solution en exprimant que la résultante de $\omega^2 x$ et de g est normale à la ligne de niveau; car on obtient $\frac{g}{\omega^2}$ pour la valeur de la sous-normale.

Supposons que, par le frottement, la masse soit entraînée dans le mouvement de rotation d'un tube circulaire autour de son axe Oz, dans lequel elle est renfermée. Soient O le centre de la base du tube; R son rayon intérieur; h la hauteur du liquide en repos. Proposons-nous de déterminer la valeur

de la constante C qui se rapporte à la surface libre. Nous avons

$$\pi R^2 h = 2\pi \int z x\, dx = \frac{2\pi}{g} \int_0^R \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - C\right) x^2\, dx,$$

d'où C.

161. *Une masse liquide pesante est comprise entre un plan horizontal, deux plans verticaux parallèles et un plan perpendiculaire à ces dernières* (exemple, écluse). — *La surface du liquide reçoit l'action d'un courant d'air horizontal constant parallèle aux parois latérales. Déterminer la forme de la surface libre.*

Cette question, soulevée par Euler, donne un rare exemple des cas où la surface libre n'est pas une surface de niveau.

Cette surface est évidemment cylindrique, et il suffit de considérer une tranche liquide parallèle aux parois latérales dont l'épaisseur est égale à l'unité, c'est-à-dire la section droite de la section cylindrique.

Soient

Ox, Oy deux axes, l'un horizontal dirigé en sens inverse de la vitesse v du vent, et l'autre suivant g;
Π le poids spécifique ρg du liquide;
θ l'inclinaison de la tangente au point m (ou x, y) sur Ox.

Nous admettrons que la pression exercée par le vent est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse, et, en désignant par k une constante, nous la représenterons par $kv^2 \sin^2\theta$.

Nous avons, en égalant deux valeurs de la pression en m,

$$\Pi(y + C) = kv^2 \sin^2\theta.$$

Si l'on prend pour origine O le point le plus élevé du profil ou répondant à $\theta = 0$, et si l'on pose $2a = \frac{kv^2}{\Pi}$, il vient

$$y = 2a \sin^2\theta,$$

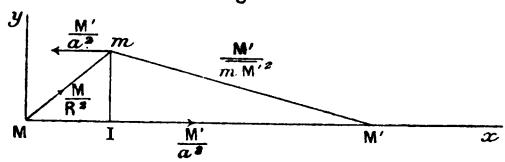
ce qui représente une cycloïde dont Ox est la tangente à un sommet O, et a le rayon de la circonférence génératrice.

162. *Forme d'équilibre que prendrait à chaque instant la surface de la mer sous l'action du Soleil et de la Lune.* — C'est ainsi que Newton a posé la question des marées. Laplace a tenu compte des forces d'inertie et centrifuges composées, en admettant que le rapport de la profondeur de la mer au rayon moyen terrestre est petit ($\frac{1}{1000}$ au plus), qui ne sont pas sans importance dans les équations du mouvement de la mer [1]. Les ondulations périodiques dues à la Lune et au Soleil s'ajoutent d'après le principe des petits mouvements; de sorte qu'il suffit de considérer en particulier chacun de ces deux astres. Les excentricités de l'orbite lunaire et de l'orbite apparente du Soleil peuvent être négligées.

Le problème que nous posons ne doit être considéré que comme donnant un simple aperçu, quoique sa solution explique suffisamment le phénomène général des marées.

Soient (*fig.* 58)

Fig. 58.



M, M' les masses de la terre et de l'astre perturbateur, censées concentrées en leurs centres de gravité M, M';
a la distance des centres M, M';
R le rayon moyen de la surface de la mer [2].

Comme la surface de la mer doit être, à chaque instant, de révolution autour de $MM'x$, il suffira de considérer une molécule m de cette surface comprise dans un plan méridien yMx, et on désignera par $x = MI$, $y = mI$ ses coordonnées.

---

(1) *Voir* notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, Chap. VII.

(2) On a

Pour la Lune.... $\frac{R}{a} = \frac{1}{60}$, $\frac{M'}{M} = 0{,}013$, $\gamma = \frac{R^3}{a^3}\frac{M'}{M} = \frac{36}{10^7}$,

» le Soleil... $\frac{R}{a} = \frac{1}{29984}$, $\frac{M'}{M} = 324{,}439$, $\gamma = \frac{R^3}{a^3}\frac{M'}{M} = \frac{12}{10^9}$.

Pour simplifier, on prendra égal à l'unité le coefficient de l'attraction newtonienne.

Les accélérations dues aux attractions exercées sur m sont

$$\frac{M'}{\overline{mM'}^2} \quad \text{de } m \text{ vers } M',$$

$$\frac{M}{R^2} \quad \text{de } m \text{ vers } M.$$

Mais M′ imprime au centre de la Terre l'accélération

$$\frac{M'}{a^2} \quad \text{de } M \text{ vers } M'.$$

Concevons qu'on imprime au système (M, M′) une vitesse et une accélération égales et contraires à celles du centre M ainsi ramené au repos. Dans ces conditions, l'accélération de m se composera de

$$X = \frac{M'}{\overline{mM'}^2}\,\frac{a-x}{\overline{mM'}} - \frac{M'}{a^2} - \frac{M}{R^2}\,\frac{x}{a} \qquad \text{suivant } Mx,$$

$$Y = -\frac{M'}{\overline{mM'}^2}\,\frac{y}{\overline{mM'}} - \frac{M}{R^2}\,\frac{y}{R} \qquad \text{»} \quad My.$$

En négligeant $\frac{R^2}{a^2}$ et *a fortiori* $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{a^2}$, on a

$$\overline{mM'}^2 = R^2 + a^2 - 2ax = a^2\left(1 - \frac{2x}{a}\right),$$

$$\overline{mM'}^{-3} = \frac{1}{a^3}\left(1 + \frac{3x}{a}\right),$$

et, par suite,

$$X = M'\left(\frac{a-x}{a^3}\right)\left(1 + \frac{3x}{a}\right) - \frac{M'}{a^2} - \frac{M^2 x}{R^3} = -\left(\frac{M}{R^3} - \frac{2M'}{a^3}\right)x,$$

$$Y = -\left(\frac{M}{R^3} + \frac{M'}{a^3}\right)y.$$

Si l'on intègre l'équation $X\,dx + Y\,dy = 0$, et, si l'on pose

$$\gamma = \frac{R^3}{a^3}\,\frac{M'}{M},$$

on obtient pour l'équation de la section méridienne

$$(1-2\gamma)x^2+(1+\gamma)y^2=\text{const. C}.$$

La surface de la mer serait donc un ellipsoïde de révolution autour de Mx. En négligeant γ^2, les deux demi-axes suivant Mx, My, sont

$$a=\sqrt{C}(1+\gamma),\qquad b=\sqrt{C}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right),$$

et, en exprimant que $\frac{4}{3}\pi ab^3=\frac{4}{3}\pi R^3$, on obtient $C=R$, et l'on a, par suite

$$(1)\qquad (1-2\gamma)x^2+(1+\gamma)y^2=R^2,$$

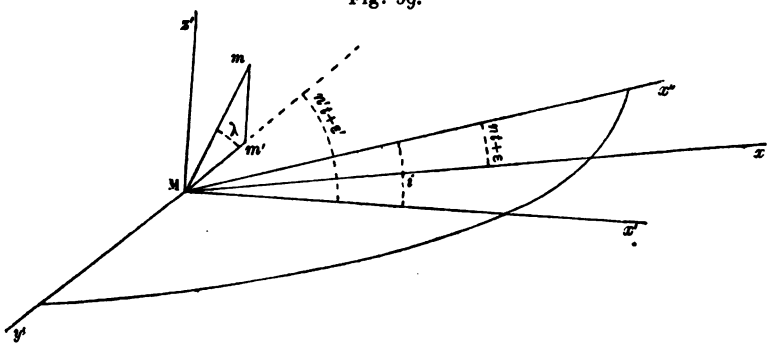
ou, en posant $x^2+y^2=r^2$,

$$(2)\qquad -3\gamma x^2+(1+\gamma)r^2=R^2.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer x en fonction de la latitude du point m et des éléments du mouvement de M, M'.

Soient (*fig.* 59)

Fig. 59.



Mz' l'axe de la Terre;

My' la ligne des nœuds;

Mx', Mx'' ses perpendiculaires dans les plans de l'équateur et de l'orbite de M';

i l'inclinaison de cette orbite sur l'équateur, qui est assez petite pour qu'on puisse prendre $\cos i=1$, $\sin i=i'$ (1);

---

(1) Pour la Lune..... $i=5°\ 8'45''$
» le Soleil..... $i=23°27'30''$

n le mouvement moyen de M′ autour de la Terre;
n' la rotation de la Terre autour de son axe;
m' la projection sur l'équation;
λ la latitude du point m.

Les angles $x\mathrm{M}x''$, $m'\mathrm{M}x'$ sont respectivement de la forme

$$nt + \varepsilon, \quad n't + \varepsilon'.$$

Nous avons

$$\overline{m'\mathrm{M}} = r\cos\lambda, \qquad z' = \overline{mm'} = r\sin\lambda,$$
$$x' = \overline{m'\mathrm{T}}\cos(n't + \varepsilon') = r\cos\lambda\cos(n't + \varepsilon'),$$
$$y' = -r\cos\lambda\sin(n't + \varepsilon'), \qquad x'' = x'\cos i + z'\sin i = x' + iz'$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x''\cos(nt + \varepsilon) + y'\sin(nt + \varepsilon) \\ &= (x' + iz')\cos(nt + \varepsilon) + y'\sin(nt + \varepsilon) \\ &= r\left\{\cos\lambda\cos[(n + n')t + \varepsilon + \varepsilon'] + i\sin\lambda\cos(ut + \varepsilon)]\right\} = \mathrm{K}r. \end{aligned}\right.$$

L'équation (2) donne

$$r = \mathrm{R}\left[1 + \frac{\gamma}{2}(3\mathrm{K}^2 - 1)\right].$$

D'où, pour l'élévation $h = r - \mathrm{R}$ de la mer au-dessus du niveau moyen,

$$h = \frac{\gamma\mathrm{R}}{2}(3\mathrm{K}^2 - 1).$$

Si nous remplaçons γ et K par leurs expressions, nous obtenons

$$h = \frac{\mathrm{R}'^4}{4a^3}\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}(\cos^2\lambda - 2\sin^2\lambda + 3\cos^2\lambda\cos[2(n + n')t + \varepsilon + \varepsilon'] \\ + 3i\sin 2\lambda\left\{\cos[(2n + n')t + 2\varepsilon + \varepsilon'] + \cos(n't + \varepsilon')\right\}).$$

En choisissant convenablement l'origine des hauteurs, on peut supprimer le terme constant et écrire simplement

$$h = \frac{3}{4}\frac{\mathrm{R}^4}{a^3}\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}(\cos^2\lambda\cos 2[(n + n')t + \varepsilon + \varepsilon'] \\ + i\sin 2\lambda\left\{\cos[(2n + n')t + 2\varepsilon + \varepsilon'] + \cos(n't + \varepsilon')\right\}).$$

Ces termes en $2nt$ mettent bien en évidence la production journalière, à des intervalles presque égaux, de deux flots et de deux jusants, abstraction faite toutefois de l'établissement du port.

163. *Équilibre des corps flottants.* — Pour qu'un *corps flottant,* c'est-à-dire plongé partiellement dans un liquide pesant, soit en équilibre, il faut, d'après le principe d'Archimède, que son poids soit égal à celui du liquide déplacé et que son centre de gravité et celui de cette portion du liquide se trouvent sur la même verticale.

Supposons que le corps soit homogène et soient V, D son volume et sa densité; v, d le volume et la densité du liquide déplacé; la première des conditions précédentes se traduit par l'équation

$$VD = vd.$$

En la supposant satisfaite, on est ramené à résoudre le problème suivant : *Diviser par un plan le volume du corps en deux parties, dont on donne le rapport, de manière que leurs centres de gravité se trouvent sur une même perpendiculaire au plan.*

Le problème se résout immédiatement dans le cas d'un solide qui a un axe de symétrie censé vertical. Il suffit, en effet, de diviser le volume en deux segments, qui soient dans un rapport donné, par un plan perpendiculaire à l'axe.

EXEMPLES :

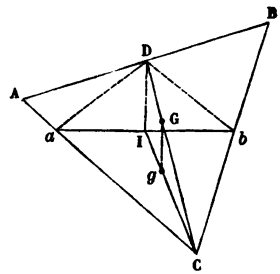
I. *Position d'équilibre d'un prisme triangulaire qui flotte sur un liquide en ayant ses arêtes horizontales.* — Les volumes du prisme et de sa partie plongée étant dans le même rapport que les aires de leurs sections droites, il suffit d'exprimer que les centres de gravité de ces sections se trouvent sur une perpendiculaire à la droite qui divise la section normale du prisme en deux parties ayant entre elles un rapport donné.

Considérons, en premier lieu, le cas où un seul sommet C est immergé (*fig.* 60). Soient

A, B les deux autres sommets;

μ le rapport de la densité du prisme à celle du liquide;
a, b les côtés opposés aux angles A, B;
D le milieu du côté AB;
$\overline{CD} = l$, $\alpha = \widehat{ACD}$, $\beta = \widehat{DCB}$;

Fig. 60.



G le centre de gravité du triangle ABC;
$\overline{aC} = x$, $\overline{bC} = y$ les portions immergées des côtés b et a;
I le milieu de ab;
g le centre de gravité du triangle aCb.

On a d'abord la relation

$$xy = \mu . ab. \tag{1}$$

Il faut maintenant exprimer que $\overline{Gg}$ ou $\overline{DI}$ est perpendiculaire à la droite $\overline{ab}$ ou encore que $\overline{aD} = \overline{Db}$, ce qui donne

$$x^2 + l^2 - 2lx\cos\alpha = y^2 + l^2 - 2ly\cos\beta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 - 2l(x\cos\alpha - y\cos\beta) = 0. \tag{2}$$

Des équations (1) et (2), on déduit la suivante

$$x^4 - 2lx^3\cos\alpha + 2l\mu xab\cos\beta - \mu^2 a^2 b^2 = 0, \tag{3}$$

qui a au moins deux racines réelles, l'une positive, qui ne pourra être admise que si elle est plus petite que b, et qu'elle donne pour y une valeur inférieure à a, et l'autre négative qui ne convient pas à la question. Si les deux autres racines

sont réelles, on voit, par la règle des signes de Descartes, qu'elles sont positives. Il ne peut donc y avoir que trois positions d'équilibre.

Lorsque le triangle est isoscèle ou que $a=b$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{l}{a}$, on a

$$(1') \qquad xy = \mu a^2.$$

L'équation (2) se décompose en deux autres

$$(2') \qquad x - y = 0,$$

$$(2'') \qquad x + y - 2l\cos\alpha = 0.$$

Les équations (1′) et (2′) donnent

$$x = y = a\sqrt{\mu}.$$

ce qui est admissible puisque $\mu < 1$.

Des équations (1′) et (2″) on déduit

$$x = l\cos\alpha \pm \sqrt{l^2\cos^2\alpha - \mu a^2};$$

comme le produit de ces racines est μa^2, si l'on prend l'une d'elles pour x, l'autre sera la valeur correspondante de y. Il faut, pour la réalité, que

$$(3) \qquad l\cos\alpha > a\sqrt{\mu},$$

ou

$$\cos\alpha > \sqrt[4]{\mu}.$$

Il faut, de plus, que la grande valeur de x soit plus petite que a, ou que

$$l\cos\alpha < \frac{a(1+\mu)}{2}.$$

En exprimant que cette inégalité est compatible avec l'inégalité (3), on trouve

$$1 - \sqrt{\mu} > 0,$$

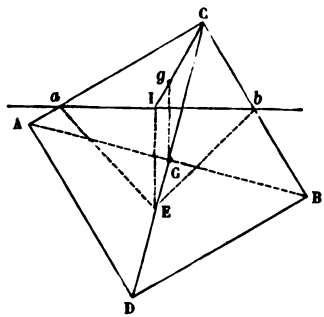
ce qui a lieu.

Le cas où deux sommets A, B sont immergés se ramène évidemment au précédent en changeant μ en $1-\mu$.

II. *Prisme à base carrée qui flotte de manière que ses arêtes soient horizontales et que, seule, l'une d'elles ne soit pas immergée.* — Comme dans la question précédente, on est ramené à considérer la section droite du prisme.

Soient (*fig.* 61)

Fig. 61.



C le sommet émergé;
D le sommet opposé et A, B les deux autres sommets;
a le côté et G le centre du carré;
$\overline{aC} = x$, $\overline{bC} = y$ les parties émergées des côtés AC, BC;
I le milieu de $\overline{ab}$;
g le centre de gravité du triangle aCb.

Les aires aCb et ACBD devant avoir un rapport donné que nous désignerons par $\frac{\mu}{2}$, nous avons d'abord

$$xy = a^2\mu. \tag{1}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer que $\overline{Gg}$ est perpendiculaire à $\overline{ab}$; à cet effet, menons par le point I la parallèle $\overline{IE}$ à $\overline{Gg}$ jusqu'à sa rencontre E avec la diagonale $\overline{CD}$ et joignons ce point aux points a et b. De ce que $\overline{CE} = \frac{3}{2}\overline{CG}$, les projections de $\overline{CE}$ sur $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ sont égales à $\frac{3}{4}a$; et, comme on doit avoir $\overline{aE} = \overline{bE}$, il vient

$$x^2 + \overline{CE}^2 - 2x\frac{3}{4}a = y^2 + \overline{CE}^2 - 2y\frac{3}{4}a,$$

d'où

$$(x-y)\left(x+y-\frac{3}{2}a\right)=0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes :

$$(2) \qquad x-y=0,$$

$$(2') \qquad x+y-\frac{3}{2}a=0,$$

lesquelles, jointes successivement à l'équation (1), donneront toutes les solutions du problème. La première donne

$$x=y=a\sqrt{\mu};$$

la seconde

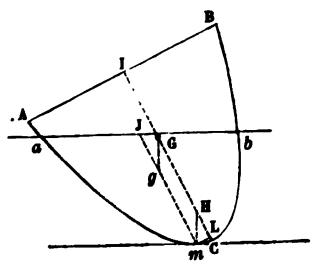
$$x=\frac{a}{4}(3\pm\sqrt{9-16\mu}).$$

Comme le produit de ces deux racines est $a^2\mu$, si l'on prend pour x l'une d'entre elles, la seconde sera la valeur correspondante de y.

III. *Cylindre horizontal dont la section droite est un segment de parabole compris entre le sommet et une perpendiculaire à l'axe.* — Comme précédemment, nous n'avons à considérer que la section droite.

Soient (*fig.* 62)

Fig. 62.



$2p$ le paramètre de la parabole;

C son sommet;

AB la perpendiculaire à l'axe qui limite le segment parabolique et dont I est le milieu;

G le centre de gravité de ce segment, situé sur $\overline{GI}$;
a la longueur $\overline{CI}$;
m le point de la parabole où la tangente est horizontale;
H le point où la normale en m rencontre $\overline{CI}$;
θ l'inclinaison de $\overline{CI}$ sur l'horizon;
g le centre de gravité du segment immergé aCb, situé sur le diamètre en m limité en J à la ligne de flottaison ab;
$\overline{mJ} = u$;
$\overline{mL} = y$ la perpendiculaire abaissée du point m sur $\overline{CI}$.

La position d'équilibre du corps sera définie par les valeurs de y et de u.

Si nous exprimons que les aires ACB, aCb sont dans un rapport donné μ, nous avons

$$\frac{2}{3}\, a\overline{AB}\; u\; \frac{2}{3}\, u\overline{ab} \sin\theta\mu;$$

or, on sait que $\overline{AB} = 2\sqrt{2pa}$, $\overline{ab}\sin\theta = 2\sqrt{2pu}$; on a donc, par suite,

$$u = a\mu^{-\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

On exprime que la droite $\overline{Gg}$ est verticale ou parallèle à $\overline{mH}$ en écrivant

$$\overline{CL} + \overline{LH} + \overline{mg} = \overline{CG}$$

ou

$$\frac{y^2}{2p} + p + \frac{3}{5}u = \frac{3}{5}a \quad (^1). \tag{2}$$

On déduit des équations (1) et (2)

$$y = \pm p\sqrt{2\left[\frac{3}{5}\frac{a}{p}\left(1-\mu^{-\frac{2}{3}}\right)-1\right]},$$

ce qui donne deux positions symétriques, toutefois à la con-

(1) On démontre facilement que le centre de gravité d'un segment parabolique limité par une corde se trouve sur le diamètre conjugué à cette corde à une distance de la courbe égale aux $\frac{3}{5}$ de la portion du diamètre comprise dans le segment.

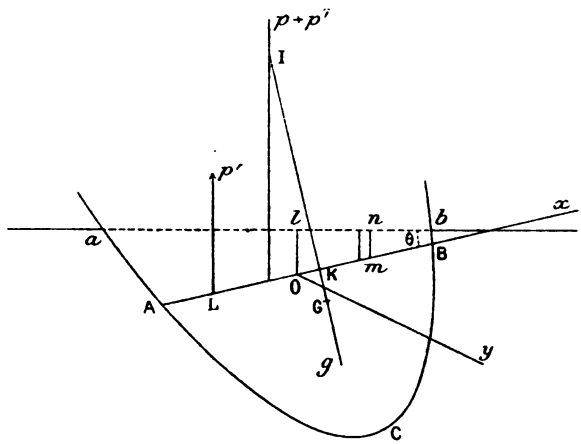
dition qu'on ait

$$\mu < \left(1 - \frac{5}{3}\frac{p}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

164. *Stabilité des corps flottants.* — Pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il faut que, en lui imprimant un déplacement et un mouvement aussi petits qu'on voudra, le déplacement reste toujours très petit.

Soient (*fig.* 63) G le centre de gravité de la masse M du corps, qui peut être hétérogène; g celui du volume liquide déplacé V lors de l'équilibre.

Fig. 63.



Le plan de la figure sera le plan mené par G perpendiculairement à l'intersection du plan de flottaison déplacé $\overline{AB}$ avec le niveau du liquide $\overline{ab}$. Comme $\overline{Gg}$ est perpendiculaire au plan AB, le point g sera compris dans le plan de la figure.

On a d'abord

$$M = V\rho. \tag{1}$$

L'indice o caractérisera les lettres qui se rapportent à l'équilibre.

Soient

θ l'angle de $\overline{AB}$ et $\overline{ab}$ dont on négligera le cube;
a la distance $\overline{Gg}$ qui sera négative si g_0 est au-dessus de G_0;
$z_0 = \overline{GK}$, z les distances de G à $\overline{AB}$ et ab.

Les forces qui sollicitent le corps sont les forces verticales Mg, $-V\rho g$, et le poids, pris en sens inverse, du volume liquide $aABb$.

La distance de g à ab étant

$$z + a\cos\theta = z + a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right),$$

le travail ou l'accroissement du potentiel des deux premières forces est, eu égard à (1),

$$(2)\quad Mg(z - z_0) - V\rho g\left[z + a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - (z_0 + a)\right] = \frac{\theta^2}{2}\rho g V a.$$

Il nous reste à calculer le travail de la troisième force.

Soient

Ω l'aire de flottaison AB;
Oy la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur la trace ABx;
$d\omega = y\,dx$, un élément de Ω en m;
$u = \overline{mu}$ sa distance à $\overline{ab}$, qui est censée du même ordre de grandeur que θ;
$u_0 = \overline{Ol}$ la valeur de u en O;
$I = \int x^2 d\omega$ le moment d'inertie de Ω par rapport à Oy.

On a d'abord

$$(a)\qquad \int x\,d\omega = 0.$$

La poussée élémentaire $-\rho g u\,d\omega$ donnera le potentiel $-\rho g\dfrac{u^2}{2}d\omega$; or

$$(b)\qquad u = u_0 - x\sin\theta = u_0 - x\theta;$$

par suite le potentiel de la poussée due à AabB aura pour expression

$$(3) \qquad -\frac{\rho g}{2}\int(u_0^2 - 2xu_0\theta + x^2\theta^2)d\omega = -\frac{\rho g}{2}(u_0^2\Omega + \mathrm{I}\theta^2).$$

L'accroissement du potentiel total ou la somme des expressions (2) et (3) sera

$$(4) \qquad -\frac{\rho g}{2}[u_0^2\Omega + \theta^2(\mathrm{I} - \mathrm{V}a)].$$

L'équilibre sera stable si le potentiel est maximum ou si la valeur (4) est négative : ce qui aura toujours lieu, quelle que soit l'orientation de la ligne de flottaison AB, si a est négatif ou si g_0 est au-dessus de G_0. Dans le cas contraire, comme u_0 est arbitraire, il faudra que $\mathrm{I} > \mathrm{V}a$, par suite

$$\text{minim } \mathrm{I} > \mathrm{V}a,$$

le minimum se rapportant aux axes Oy passant par le centre de gravité de Ω.

Métacentre. — Nous supposerons ici que le plan d'oscillation ACB est un plan de symétrie et par suite que O est le centre de gravité de Ω. Il nous suffira ici d'avoir égard aux premières puissances de u et θ.

La poussée produite par l'immersion de AabB est, en ayant égard à (b),

$$(5) \qquad p' = \rho g\int u\,d\omega = \rho g\int(u_0 - x\theta)d\omega = \rho g u_0\Omega.$$

Soient b la distance $\overline{\mathrm{OK}}$; L l'intersection avec AB de la directrice de p'.

Le sens d'un moment sera positif (gauche à droite dans le cas de la figure), quand ce moment tendra à diminuer l'angle θ.

Le moment de p' par rapport à Oy est

$$p'\overline{\mathrm{OL}} = -\rho g\int u\,d\omega\, x\cos\theta = -\rho g\int(u_0 - \theta x)x\,d\omega = \rho g\mathrm{I}\theta$$

et son moment, par rapport à la parallèle Gy' en G à Oy,

$$p'(\overline{\mathrm{LK}}\cos\theta + \overline{\mathrm{GK}}\sin\theta) = p'\overline{\mathrm{LK}} = p'(\mathrm{OL} + \mathrm{OK}) = \rho g\mathrm{I}\theta + \rho g u_0 b\Omega.$$

En ajoutant cette expression au moment par rapport à Gy' de la poussée $\rho g V = p$ due à ACB, c'est-à-dire

$$-\rho g V a \sin\theta = -\rho g V a \theta,$$

on aura pour le moment, par rapport à son centre de gravité, des forces qui sollicitent le corps

$$(6) \qquad \mathfrak{M} = \rho g [u_0 b \Omega + (I - V a)\theta].$$

Soit I l'intersection de la direction de la poussée totale $p + p'$ avec celle de $\overline{GK}$, on a

$$(p + p')\overline{GI} \sin\theta = \mathfrak{M},$$

d'où, en négligeant $p' \sin\theta$ qui est du second ordre,

$$\overline{GI} = \frac{\mathfrak{M}}{p\theta} = \frac{\mathfrak{M}}{\rho g V \theta} = \frac{1}{V}\left(\frac{u_0 b \Omega}{\theta} + I - V a\right).$$

Le point I ne sera déterminé que si $b = 0$ et alors

$$\overline{GI} = \frac{I - V a}{V}.$$

Le point I est le *métacentre* de Bouguer. Comme, pour que l'équilibre soit stable, il faut que $\mathfrak{M} > 0$, on retrouve, dans le cas restreint actuel, la condition obtenue plus haut $I - V a > 0$, ce qui exprime que le métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité du corps.

165. *Des petites oscillations du corps dans le cas d'un métacentre.* — En se reportant à la valeur (5) de p' on a pour le mouvement du centre de gravité

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -p' = -\Omega \rho g u_0$$

ou, en remplaçant M par $V\rho$,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g\Omega}{V} u_0;$$

or $z = \overline{Ol} + \overline{OG}\cos\theta = u_0 + \overline{OG}$, par suite

$$\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} = -\frac{g\Omega u_0}{V},$$

équation des petites oscillations du pendule.

Si A est le moment d'inertie de M par rapport à Gy' on a

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathfrak{M} = -\rho g(1 - Va)\theta,$$

c'est-à-dire une équation semblable à la précédente.

166. *Mesure des altitudes au moyen du baromètre.* — En désignant par $R = 6366182^m$ le rayon moyen de la Terre, l'accélération de la pesanteur à l'altitude h, est, en ne conservant que la première puissance de $\frac{h}{R}$,

$$g\left(\frac{R}{R+g}\right)^2 = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

La plus élevée des montagnes connues est le Gaorisankar (Asie), dont l'altitude, qui est estimée à 8840^m, n'a pas été atteinte par les aérostats. En admettant $h = 9000^m$, la diminution relative de l'accélération ne serait que $\frac{208}{10^4}$ que l'on peut négliger.

Soient

Π_a le poids spécifique de l'air à 0° sous la pression moyenne p_a correspondant à la colonne mercurielle de $0^m,76$;

Π, p le poids spécifique et la pression de l'air à l'altitude z, où la température est θ; α le coefficient de dilatation de l'air.

On a

$$(1) \qquad dp = -\rho g\,dz = -\Pi\,dz = -\Pi_a\frac{p\,dz}{p_a(1+\alpha\theta)}.$$

Soient

O le centre de la Terre;

m_0 une station dont on connaît l'altitude;

m_1 un point dont on veut déterminer l'altitude;

p_0, p_1 les pressions en m_0, m_1 observées au même instant (au moyen de chronomètres, signaux, armes à feu), lorsque les courants d'air sont suffisamment modérés; θ_0, θ_1 [1] les températures observées en m_0, m_1.

En raison de la faible valeur de $\alpha = 0,00366$, on peut prendre, avec une approximation suffisante,

$$\theta = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}.$$

Soient m'_1 l'intersection de $\widehat{Om_0}$ avec la sphère concentrique à la terre passant par m_1; comme, pratiquement, l'angle $\widehat{m_1 O m'_1}$ est toujours petit, on peut considérer $\overline{m'_1 m_0}$ comme représentant l'excès de la latitude de m_1 sur celle de m_0.

L'équation (1) donne alors

$$h = p_a \frac{(1+\alpha\theta)}{\Pi_a} \log \frac{p_0}{p_1} = \frac{p_a(1+\alpha\theta)}{\Pi_a \times 0,4342945} \log \text{vulg.} \frac{p_0}{p_1}.$$

Il a paru convenable de pousser jusqu'à 0,004 la valeur de α pour faire la part de l'état hydrométrique de l'air : c'est ainsi qu'en transformant en nombre on obtient

$$h = 18336^{\text{m}}(1 + 0,004\,\theta) \log \text{vulg.} \frac{p_0}{p_1}.$$

A la suite d'un grand nombre d'observations dans les Pyrénées (vers 1788), Ramond de Carbonnières était arrivé à poser la formule

$$h = 18393 \log \text{vulg.} \frac{p_0}{p_1},$$

qui diffère peu de la précédente.

---

[1] D'après les observations faites au grand Saint-Bernard (2472^{m}), au petit Saint-Bernard (2200^{m}), à Cogne (1500^{m}), à Aoste (600^{m}) et à Yvrée (400^{m}), la température moyenne diminuerait de 1° par 160^{m} d'augmentation d'altitude.

CHAPITRE XIV.

DU MOUVEMENT DES FLUIDES (HYDRODYNAMIQUE).

167. *Équations générales du mouvement.* — On a donné le nom d'*Hydrodynamique* à la théorie du mouvement des fluides qui s'appuie uniquement sur les principes fondamentaux de la Mécanique, pour la distinguer de l'Hydraulique, dont il sera question plus loin et où l'on fait intervenir certaines hypothèses particulières.

Soient u, v, w les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse V des molécules qui traversent à l'instant t l'élément de volume $dx\,dy\,dz$.

Pour simplifier, on admettra que ce groupe de molécules est réduit à un point matériel. En suivant ce point matériel que dorénavant nous considérons comme une simple molécule, les équations du n° 155 nous donneront

$$(1)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt},$$

en désignant par $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$ l'accélération de la force extérieure qui sollicite le point matériel.

Mais u, par exemple, variera, en général, avec x, y, z, t et l'on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

puis

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

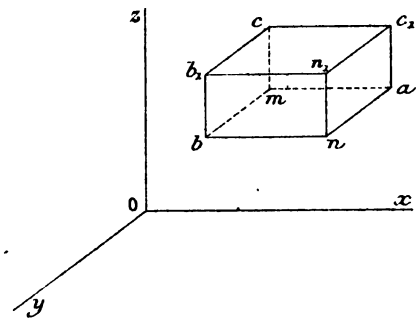
Nous admettrons qu'on a entre ρ et p une relation de la forme

$$\rho = f(p). \tag{3}$$

Malgré ce qui précède, les équations (2) sont insuffisantes pour permettre de déterminer p, u, v, w en fonction du temps; il faut donc leur adjoindre une nouvelle équation dite de *continuité* et que nous allons établir.

Soient à l'instant t (*fig.* 64) x, y, z les coordonnées d'une

Fig. 64.



molécule m, et pour les arêtes d'un parallélépipède élémentaire issu de m

$$\overline{ma} = \overline{bn} = \overline{b_1 n_1} = \overline{cc_1} = dx,$$
$$\overline{mb} = \overline{an} = \overline{cb_1} = \overline{c_1 n_1} = dy,$$
$$\overline{mc} = \overline{nn_1} = \overline{bb_1} = \overline{ac_1} = dz.$$

Au bout du temps dt, les points m, a, ... seront venus en m', a', ... Les coordonnées de m' étant $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$, celles de a' seront

$$x + dx + u\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt, \quad y + v\,dt + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dt, \quad z + w\,dt + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dt,$$

et l'on aura, par suite, pour les projections de $m'a'$ sur Ox, Oy, Oz

$$A_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) dx, \qquad B_1 = \frac{\partial v}{\partial x}\,dt\,dx, \qquad C_1 = \frac{\partial w}{\partial x}\,dt\,dx;$$

et de même pour celles de $m'b'$

$$A_2 = \frac{\partial u}{\partial y} dt\, dy, \qquad B_2 = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt\right) dy, \qquad C_2 = \frac{\partial w}{\partial y} dt\, dy;$$

et pour celles de $m'c'$

$$A_3 = \frac{\partial u}{\partial z} dt\, dz, \qquad B_3 = \frac{\partial v}{\partial z} dt\, dz, \qquad C_3 = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt\right) dz.$$

Pour bn, par exemple, il faudrait substituer dans A_1, B_1, C_1 $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ à u, $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ à v, $w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$ à w, mais cela ne ferait qu'introduire des quantités du troisième ordre, c'est-à-dire négligeables. Il suit de là que l'élément de volume déformé sera un parallélépipède légèrement obliquangle. Le volume de ce parallélépipède est, en négligeant les infiniment petits du cinquième ordre

$$\begin{aligned} &A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 + A_2 B_3 C_1 - A_2 B_1 C_3 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 \\ &\quad = dx\, dy\, dz \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt\right]. \end{aligned}$$

On voit que ce volume est le même que si l'on avait augmenté de $\frac{\partial u}{\partial x} dx\, dt$, $\frac{\partial v}{\partial y} \partial y\, dt$, $\frac{\partial w}{\partial z} dz\, dt$ les arêtes dx, dy, dz du parallélépipède rectangle primitif.

Au bout de dt la densité est devenue

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial y} v\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\, dt.$$

On a donc, en exprimant que la masse de l'élément de volume est restée la même,

$$\begin{aligned} &dx\, dy\, dz \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt\right] \\ &\quad \times \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} u\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial y} v\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\, dt\right)\right] - \rho\, dx\, dy\, dz = 0, \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$(4)\qquad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial y}v+\frac{\partial \rho}{\partial z}w\,(^1)=0,$$

où

$$(4')\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0.$$

Dans le cas d'un liquide où ρ est constant, on a simplement

$$(4'')\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

Il nous reste à établir les conditions auxquelles doivent satisfaire les intégrales des équations aux dérivées partielles (2) et (4).

Soit $F(x, y, z, t)=0$ l'équation d'une paroi, censée mobile pour plus de généralité, et suivant laquelle on admet que le fluide glisse; on a $F(x+u\,dt, y+v\,dt, z+w\,dt, t+dt)=0$, d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w=0.$$

Désignant par $p=F_1(t)$ la pression sur la surface libre, on voit que

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial y}v+\frac{\partial p}{\partial z}w=F_1'(t).$$

---

(1) On démontre souvent cette équation en employant le raisonnement de Fourier pour les flux de chaleur. La différence des masses fluides qui, dans le temps dt, entre par l'une des faces $dy\,dz$ et qui en sort par la face opposée est

$$dy\,dz\left(\rho u\,dt-\rho u\,dt-\frac{\partial \rho u}{\partial x}dx\,dt\right)=-dx\,dy\,dz\,dt\frac{\partial \rho u}{\partial x},\qquad \ldots;$$

la masse du parallélépipède s'est donc accrue de

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right).$$

Mais cet accroissement a aussi pour valeur

$$dx\,dy\,dz\frac{\partial \rho}{\partial t}dt,$$

et en égalant on obtient le résultat voulu.

168. *Du mouvement permanent.* — Supposons que le mouvement soit tel que les molécules qui se succèdent au point (x, y, z) aient une vitesse V constante en grandeur et en direction; dans cas, p, u, v, w ne renferment pas implicitement le temps. Si nous admettons que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est la différentielle exacte d'un potentiel U, fonction de x, y, z, et si nous posons $\int \frac{1}{\rho} dp = \Psi(p)$, les équations (1) deviennent

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{du}{dt}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{dw}{dt},$$

d'où

$$d\Psi = dU - \left(\frac{du}{dt}\,dx + \frac{dv}{dt}\,dy + \frac{dw}{dt}\,dz\right).$$

Or, en suivant une molécule, on a $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$; par suite

$$d\Psi = dU - \frac{1}{2}\,dV^2.$$

Considérons le cas d'un liquide pesant contenu dans un vase où il est maintenu à niveau constant; désignons par p_0 la pression atmosphérique et dirigeons Oz dans le sens de la pesanteur; nous avons $dU = g\,dz$, par suite

$$\frac{1}{\rho}\,dp = g\,dz - \frac{1}{2}\,dV^2,$$

d'où, en appelant Π le poids spécifique ρg,

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi},$$

ce qui constitue le théorème de Daniel Bernoulli, sur lequel on reviendra avec détails en Hydraulique.

On peut arriver directement, comme il suit, à ce théorème. Le faisceau des trajectoires moléculaires partant des points d'un élément $d\omega_0 = \overline{a_0 b_0}$ de la surface libre est ce qu'on appelle un *filet*. Soit $d\omega = ab$ la section du filet correspondant à z; au bout de dt, les molécules qui se trouvaient dans $\overline{a_0 b_0}$, $\overline{ab}$, sont venues respectivement dans $\overline{a'_0 b'_0}$, $\overline{a' b'}$; si m

est la masse des volumes égaux $a_0 b_0 a'_0 b'_0$, $aba'b'$, son volume est $\frac{m}{\rho}$ et l'équation de la force vive donne

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = mg(z - z_0) + \frac{m}{\rho}(p_0 - p),$$

et, par la suppression du facteur m, on retombe sur la formule de Bernoulli.

169. *Potentiel de la vitesse.* — Supposons que X, Y, Z dérivent d'un potentiel U; en posant $U - \int \frac{dp}{\rho} = Q$, les équations (2) deviennent

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

d'où

$$dQ = \frac{\partial}{\partial t}(u\,dz + v\,dy + w\,dz) + u\frac{\partial u}{\partial x}dx + v\frac{\partial v}{\partial y}dy + w\frac{\partial w}{\partial z}dz$$
$$+ v\frac{\partial u}{\partial y}dx + w\frac{\partial u}{\partial z}dx + u\frac{\partial v}{\partial x}dy + w\frac{\partial v}{\partial z}dy + u\frac{\partial w}{\partial x}dz + v\frac{\partial w}{\partial y}dz,$$

ou

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & dQ - \frac{1}{2}d(u^2 + v^2 + w^2) \\ & = \frac{\partial}{\partial t}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)(v\,dx - u\,dy) \\ & \quad + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)(w\,dx - u\,dz) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)(w\,dy - v\,dz), \end{aligned}\right.$$

la différentielle du second terme du premier membre se rapportant seulement aux variables x, y, z, c'est-à-dire en supposant t constant.

Le second membre, comme le premier, devra être la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, et cette condition sera satisfaite si

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est une différentielle exacte. Supposons qu'il en soit ainsi à un instant t_0, et voyons ce que devient le second membre de l'équation (5) à un instant $t = t_0 + \varepsilon$, qui diffère infiniment peu du précédent. Nous pouvons écrire

$$u = u_0 + u'_0 \varepsilon, \qquad v = v_0 + v'_0 \varepsilon, \qquad w = w_0 + w'_0 \varepsilon.$$

Le second membre de l'équation (5) devient

$$\begin{aligned} &u'_0 dx + v'_0 dy + w'_0 dz \\ &\quad + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial u'_0}{\partial y} - \frac{\partial v'_0}{\partial x} \right) (v_0 dz - u_0 dy) + \left(\frac{\partial u'_0}{\partial z} - \frac{\partial w'_0}{\partial x} \right) (w_0 dz - u_0 dz) \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial v'_0}{\partial z} - \frac{\partial w'_0}{\partial y} \right) (w_0 dy - v_0 dz) \right]. \end{aligned}$$

Cette expression devant être une différentielle exacte, quel que soit l'infiniment petit ε, il faut qu'il en soit de même de $u'_0 dx + v'_0 dy + w'_0 dz$. Donc, à l'instant $t_0 + \varepsilon$, l'expression

$$u dx + v dy + w dz = u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz + \varepsilon (u'_0 dx + v'_0 dy + w'_0 dz)$$

est encore une différentielle exacte. On peut conclure de là que si, à une certaine époque, $u dx + v dy + w dz$ est la différentielle exacte d'une fonction φ (*potentiel de la vitesse*), elle le sera également à une époque quelconque. C'est ce qui aura lieu notamment si le fluide part du repos. La démonstration précédente, réduction de celle de Lagrange, n'a pas été admise comme suffisante par bien des géomètres; c'est pourquoi nous renverrons à celle de Cauchy contre laquelle il n'y a rien à redire, et qui se trouve reproduite au Tome VII de cet Ouvrage, Chap. VIII.

L'équation (5), en y faisant $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ et remplaçant Q par son expression, donne

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho} dp = dU - d\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{2} \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} \right),$$

en ne perdant pas de vue que la caractéristique d se rapporte à x, y, z en supposant t constant.

L'équation de continuité (4) prend la forme

$$(7)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

L'équation (6) donne, en désignant par $f'(t)$ une fonction arbitraire,

$$(8)\qquad \int\frac{dp}{\rho} = U - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}\right) - f'(t),$$

mais on pourra remplacer φ par $\varphi + f(t)$, ce qui n'influence en rien l'équation (7).

On voit que, par la considération du potentiel de la vitesse, on n'a qu'à déterminer les inconnues φ et p en fonction de x, y, z, t, au lieu des quatre inconnues u, v, w, p.

Si le fluide est un liquide, l'équation (7) se réduit à la suivante

$$(7')\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Si, de plus, le mouvement est permanent, on a $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, et, dans l'équation (8), $-f'(t)$ doit être remplacée par une constante C. Dans le cas d'un liquide pesant, on a $U = gz$, et, en désignant par V la vitesse, l'équation (8) donne

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{1}{2}V^2 + C,$$

d'où la formule de Daniel Bernoulli (n° 168).

170. *Équations du mouvement d'un fluide en coordonnées cylindriques.* — Reportons-nous à la fin du n° 155.

Soient

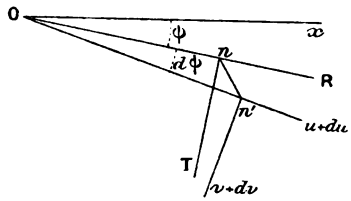
$$u = \frac{dr}{dt}, \qquad v = r\frac{d\psi}{dt} = \omega r, \qquad w = \frac{dz}{dt},$$

les composantes de la vitesse de la molécule m ou (r, y, z) suivant ar, at, Oz; φ_r, φ_t, φ_z les composantes semblables de l'accélération que prend m; nous avons, en faisant intervenir l'inertie,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = R - \varphi_r, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\,\partial\psi} = T - \varphi_t, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \varphi_z.$$

Soient (*fig.* 65) aux instants t, $t+dt$, n, n' les projections sur le plan xOy de la molécule fluide considérée.

Fig. 65.



Les vitesses $-u$, $u+\frac{du}{dt}dt$ donnent les composantes

$$\frac{du}{dt}dt \qquad \text{suivant R},$$

$$\left(u+\frac{du}{dt}dt\right)d\psi = u\omega\,dt \qquad \text{»} \quad \text{T},$$

et les vitesses $-v$, $v+\frac{dv}{dt}dt$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega r}{dt} \qquad \text{suivant T},$$

$$-\left(v+\frac{dv}{dt}dt\right)d\psi = -v\omega\,dt = -\omega^2 r\,dt \qquad \text{»} \quad \text{R}.$$

Nous avons donc

$$\varphi_r = \frac{du}{dt} - \omega^2 r,$$

$$\varphi_t = \omega u + \frac{d\omega r}{dt},$$

$$\varphi_z = \frac{dw}{dt}$$

et, par suite,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} &= \mathrm{R} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial r}{\partial t} + \omega\frac{\partial u}{\partial \psi} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \omega^2 r,\\ \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \psi} &= \mathrm{T} - r\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial \psi} + w\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) - 2\omega u,\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \mathrm{Z} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \omega\frac{\partial w}{\partial \psi} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Pour rétablir l'équation de continuité nous aurons recours à la méthode employée dans la Théorie de la chaleur [1]. La différence entre les masses qui, dans le temps dt, entrent dans l'élément de volume et en sortent, est

$$\begin{aligned}
&\rho r\,d\psi\,dz\,u\,dt - \left(\rho r\,d\psi\,dz\,u\,dt + d\psi\,dz\,dt\,\frac{\partial \rho u r}{\partial r}\,dr\right)\\
&\quad + \rho\,dr\,dz\,v\,dt - \left(\rho\,dr\,dz\,v\,dt + dr\,dz\,dt\,\frac{\partial \rho v}{\partial \psi}\,d\psi\right)\\
&\quad + \rho r\,d\psi\,dr\,w\,dt - \left(\rho r\,d\psi\,dr\,w\,dt + r\,d\psi\,dr\,dt\,\frac{\partial \rho w}{\partial z}\,dz\right)\\
&= -\,d\psi\,dz\,dr\,dt\left(r\,\frac{\partial \rho u}{\partial r} + \rho u + r\,\frac{\partial \rho \omega}{\partial \psi} + r\,\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

et, comme elle est égale à $r\,d\psi\,dr\,dz\,\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\,dt$, il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho \omega}{\partial \psi} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{u\rho}{r} = 0. \tag{10}$$

Nous allons faire quelques applications des équations (9) et (10).

I. *L'axe* Oz *est un axe de symétrie pendant le mouvement.* — Pour qu'il en soit ainsi il faut que T soit nul, que R, Z, u, ω, w, p soient indépendants de ψ; les équations (9) se réduisent alors aux suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \omega^2 r = \mathrm{R},\\
&\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial r} + w\frac{\partial \omega}{\partial z} + 2\omega\frac{u}{r} = 0,\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{Z}.
\end{aligned}\right. \tag{9'}$$

La seconde de ces équations peut s'écrire

$$\frac{d\omega}{dt} + 2\,\frac{\omega}{r}\,\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$\omega r^2 = a.$$

---

[1] *Voir* la note du n° 167.

a étant une constante pour la molécule considérée, mais qui peut varier d'une molécule à une autre. *Donc la vitesse angulaire d'une molécule autour de l'axe de symétrie varie en raison inverse de la distance à cet axe* (Théor. de Swanberg), résultat qui peut être utile dans la théorie des tourbillons.

II. *Mouvement symétrique dans un vase de révolution autour de* Oz, *d'un liquide dont la rotation initiale est nulle.* — On a $a = 0$, $\omega = 0$, $\rho =$ const. et l'équation (10) devient

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + r\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Soient $r' = f(z)$ l'équation de la section méridienne de la paroi; u', w' les valeurs de u, w au point (r', z) de cette paroi. La condition relative au glissement du liquide sur la paroi est

$$\frac{u'}{w'} = \frac{dr'}{dz}. \tag{12}$$

On a, pour le volume liquide qui, à l'instant t, traverse, dans le temps dt, la section du parallèle définie par z,

$$Q\,dt = \int_0^{r'} 2\pi r\,dr\,w\,dt,$$

d'où, pour ce qu'on peut appeler le *débit* par unité de temps,

$$Q = 2\pi \int_0^{r'} rw\,dr. \tag{13}$$

On a, en tenant compte de la relation (11),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{r'} rw\,dr &= r'w'\frac{dr'}{dz} + \int_0^{r'} r\frac{\partial w}{\partial z}\,dr = r'w'\frac{dr'}{dz} - \int_0^{r'}\frac{\partial ru}{\partial r}\,dr \\ &= r'w'\frac{dr'}{dz} - r'u' = -r'\left(u' - w'\frac{dr'}{dz}\right),\end{aligned}$$

expression qui est nulle en vertu de la condition (12), ce qui devait être, car évidemment Q doit être indépendant de z.

Supposons que R, Z dérivent d'un potentiel U de r et z, et

qu'il y ait un potentiel φ de la vitesse; on a, en se reportant à ce qui précède,

$$\frac{1}{\rho}\,dp = dU - d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\,d\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}\right),$$

d'où, en continuant à comprendre dans φ la fonction arbitraire du temps introduite par l'intégration,

$$(14)\qquad \frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}\right).$$

L'équation de continuité (11) devient

$$(15)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0.$$

171. Malgré la simplification considérable apportée aux équations de l'Hydrodynamique par la considération du potentiel de la vitesse, ces équations n'ont pu permettre jusqu'ici que de résoudre un nombre restreint de questions pour lesquelles nous renverrons aux n°s 72 et suivants du Tome VII.

Nous ferons observer que l'hypothèse du glissement des molécules fluides sur une paroi n'est pas toujours conforme à la réalité. Considérons, par exemple, un vase cylindrique vertical en verre, au centre de la base duquel on a pratiqué un orifice. Si le vase renferme de l'eau maintenue à niveau constant, on reconnaît, en mélangeant au liquide des matières colorées très ténues, que le faisceau des filets se détache presque immédiatement de la paroi latérale, affecte la forme d'une surface de révolution dont les rayons des parallèles diminuent depuis le niveau jusqu'à l'orifice, de sorte qu'il y a une masse, pour ainsi dire stagnante, comprise entre la paroi latérale et le fond.

Pour élargir le domaine de la dynamique des fluides pesants, surtout au point de vue des applications, on fait intervenir des hypothèses, dont il sera question dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XV.

HYDRAULIQUE.

§ I. — Questions diverses.

172. *Généralités.* — L'*Hydraulique* est une Science d'application qui se rapporte au mouvement des fluides pesants, dans laquelle on fait intervenir en même temps les principes de la Mécanique et certaines hypothèses auxquelles on a été conduit par l'observation et qui ont pour objet de simplifier les solutions des questions qu'on a à résoudre.

Il est convenu que, à moins d'avis contraire, nous ne nous occuperons que du mouvement permanent, ou par filets (n° 168).

Nous admettrons que, quelle que soit la forme d'un vase dans lequel un liquide est maintenu à niveau constant $a_0 b_0$, les composantes verticales des vitesses de toutes les molécules qui se trouvent à chaque instant dans le plan de niveau sont égales.

Un orifice pratiqué dans une paroi peut être suffisamment évasé à l'extérieur pour qu'il ne présente à l'intérieur qu'une arête fermée vive et plane, et que le liquide en sortant ne touche pas l'évasement. C'est ce qu'on appelle un *orifice en mince paroi.*

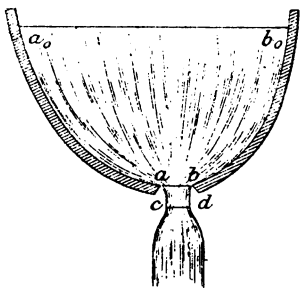
Les filets, à la traversée du plan de l'orifice, sont inclinés sur la normale au plan; cette inclinaison, qui est considérée comme nulle pour le filet qui passe par le centre de gravité de l'aire de l'orifice, va en augmentant à mesure qu'on s'approche du périmètre.

On a constaté qu'au delà de l'orifice *ab*, les inclinaisons des filets diminuent, que le parallélisme s'établit dans une section *cd* très voisine de *ab*, que ce parallélisme se maintient sur une très petite longueur, et qu'ensuite les filets forment un faisceau divergent dont d'ailleurs nous n'avons pas à nous occuper. La section *cd* est dite *contractée* et le rapport μ de son aire à celle ω de l'orifice *ab* est le *coefficient de contraction*.

173. *Écoulement par un orifice en mince paroi.* — Nous désignerons par ω_0 l'aire $a_0 b_0$, par V_0 la composante verticale des vitesses de molécules qui se trouvent dans son plan. Nous avons deux cas à considérer.

1° *L'orifice est horizontal* (*fig.* 66). — Soit h la hauteur de $a_0 b_0$ au-dessus de *ab*; en négligeant la petite distance qui

Fig. 66.



sépare *cd* de *ab*, la vitesse commune à toutes les molécules qui traversent $\mu\omega$ est $\sqrt{V_0^2 + 2gh}$; dans le temps dt, ces molécules engendrent le volume $\mu\omega\sqrt{V_0^2 + 2gh}\,dt$; mais ce volume est aussi égal à celui $V_0\omega_0\,dt$ du liquide fourni de l'extérieur au vase; on a donc

$$V_0\omega_0 = \mu\omega\sqrt{V_0^2 + 2gh}.$$

Chaque membre de cette égalité représente le volume liquide Q dépensé par seconde ou ce qu'on appelle le *débit;*

on déduit de là

$$Q = V_0 \omega_0 = \mu\omega \sqrt{\frac{2gh}{1 - \mu^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

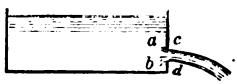
Si l'orifice est suffisamment petit, on peut écrire

$$\text{(A)} \qquad Q = \mu\omega\sqrt{2gh}.$$

On donne souvent à μ le nom de *coefficient de dépense.*

2° *L'orifice est vertical* (*fig.* 67). — L'observation a conduit à admettre que la normale Ox au centre de gravité O de ab passe par le centre de gravité de la section contractée.

Fig. 67.



Soient h la hauteur de $a_0 b_0$ au-dessus de O; ζ la hauteur au-dessus du plan horizontal passant par Ox d'un élément $d\omega'$ de la section contractée.

Pour que nos hypothèses soient admissibles, il faut que le rapport $\frac{\zeta}{h}$ soit petit, car autrement il se produirait des tourbillons à l'entrée du liquide dans ab. La vitesse dans $d\omega'$ sera donc, en négligeant le carré de $\frac{\zeta}{h}$,

$$\sqrt{V_0^2 + 2g(h - \zeta)} = \sqrt{V_0^2 + 2gh}\left(1 - \frac{g\zeta}{V_0^2 + 2gh}\right),$$

et le débit

$$Q = \sqrt{V_0^2 + 2gh}\int\left(1 - \frac{g\zeta}{V_0^2 + 2gh}\right) d\omega' = \mu\omega\sqrt{V_0^2 + 2gh}.$$

On retombe ainsi sur les formules du cas précédent. On arriverait au même résultat par un orifice orienté d'une manière quelconque.

Soit d le diamètre d'un orifice circulaire; on a trouvé expérimentalement pour $h \leqq 6^m,80$ et pour des valeurs de d com-

prises entre $0^m,02$ et $0^m,16$,

$$\mu = 0,62.$$

Le coefficient de contraction pour un orifice de forme quelconque, ne dépend que de la largeur minimum de l'orifice, et reste égal à 0,62 tant que la hauteur n'est pas supérieure à vingt fois cette largeur.

Lorsque l'orifice n'est pas circulaire, le croisement des filets fluides au delà de la section contractée donne lieu à un phénomène connu sous le nom d'*inversion de la veine* fluide et qui consiste en ce que la section de la veine éprouve des variations telles qu'elle finit par ne plus avoir le moindre rapport avec celle de l'orifice.

174. *Ajutage conique très court.* — On continuera, et jusqu'à nouvel ordre, à désigner par h la hauteur du niveau au-dessus du centre de gravité de l'orifice et à négliger $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

Dans la formule (A) du numéro précédent, le coefficient μ sera très voisine de l'unité, en raison de la tendance au parallélisme des filets à la sortie de l'orifice établie par la forme

Fig. 68.

même de l'orifice (*fig.* 68). On a trouvé les résultats suivants (Castel) :

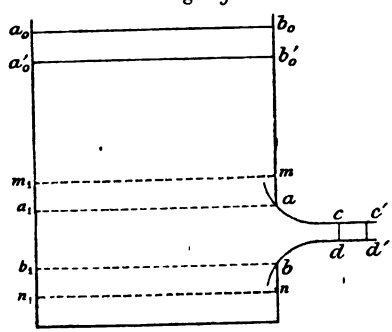
Angle du cône.	μ.
8°	0,93
15	0,94
20	0,92
30	0,90
40	0,87
50	0,85

175. *Minimum du coefficient de contraction.* — Nous supposerons que l'orifice ab est pratiqué dans une paroi plane latérale d'un vase rectangulaire vertical, et nous désignerons par $a_1 b_1$ la projection de cet orifice sur la paroi opposée; nous négligerons V_0.

Les vitesses des molécules, en contact avec la paroi dans laquelle ab est pratiqué, ne deviennent sensibles que dans une certaine zone annulaire (ma, nb) dont on désignera l'aire par k. En vertu de la formule $p = p_0 + \Pi z - \Pi \frac{V^2}{2g}$, la pression moyenne p' sur cette zone sera inférieure à la pression statique. Pour toutes les autres parties des parois latérales, la pression sera très sensiblement égale à la pression statique.

Soit (*fig.* 69) $m_1 n_1$ la projection de l'aire mn sur la paroi $a_0 b_1$; on peut faire abstraction des parois latérales en leur substituant leurs réactions sur le liquide.

Fig. 69.



Au bout du temps dt, les molécules qui se trouvaient dans $a_0 b_0$, cd sont venues en $a'_0 b'_0$, $c'd'$. L'accroissement, suivant l'axe de l'orifice, de la quantité de mouvement de la masse $a_0 b_0 cd$ est

$$\frac{\Pi}{g} \mu \omega V \, dt . V.$$

En dehors de mn, $m_1 n_1$, les réactions horizontales des parois s'entre-détruisent. Les réactions sur la masse $abcd$ de $m_1 n_1$,

de (ma, nb) et la pression atmosphérique donnent l'impulsion

$$(p_0 + \Pi h)(\omega + k)\,dt - p'k\,dt - p_0\omega\,dt.$$

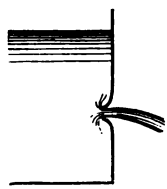
En l'égalant à l'expression précédente et faisant $V = 2gh$, on obtient

$$\mu = \frac{1}{2} + (p_0 + \Pi h - p')\frac{k}{2\omega\Pi h};$$

on voit donc que, en général, μ sera supérieur à $\frac{1}{2}$.

Dans le cas d'un ajutage rentrant (*fig.* 70), les vitesses dans le voisinage de ab sont très petites et l'on a sensible-

Fig. 70.



ment $p' = p_0 + \Pi h$, par suite $\mu = 0,50$, chiffre qui diffère peu de celui (0,519) que Borda a obtenu expérimentalement.

176. *Cas où, au sortir d'un orifice, la contraction n'est pas complète.* — Une fausse paroi est une portion matérielle du cylindre horizontal ayant pour base l'orifice (*fig.* 71) pénétrant dans le liquide.

Fig. 71.

La contraction étant, ou à peu près, supprimée suivant la fausse paroi, on doit obtenir, pour un même orifice, un débit plus considérable.

Soient

S le périmètre de l'orifice;
s la portion de ce périmètre sur laquelle la contraction est supprimée;
a, b deux constantes dépendant de la forme de l'orifice.

D'après Lesbros [1], le coefficient de dépense serait de la forme

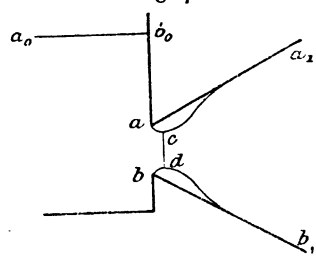
$$\mu = a\left(1 + \frac{bs}{S}\right).$$

D'après ce qu'on a vu plus haut, on aurait généralement $a = 0{,}62\,\delta$.

Cette formule ne doit pouvoir s'appliquer que si le rapport $\frac{s}{S}$ ne se rapproche pas trop de l'unité; car, pour $s = S$, on retomberait sur l'ajutage rentrant, pour lequel μ atteint son minimum 0,50.

177. *Ajutage conique divergent.* — Soient p (*fig.* 72) la

Fig. 72.



pression dans la section contractée cd, où la vitesse est V; V_1 la vitesse au centre de la section du débouché $a_1 b_1 = \omega_1$; on a

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p}{\Pi}, \qquad \frac{V_1^2}{2g} = h, \qquad \mu\omega V = \omega_1 V_1,$$

---

[1] *Recueil des Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences*, 1850.

d'où, par l'élimination de V, V_1,

$$\frac{p}{\Pi h} = 1 + \frac{p_0}{\Pi h} - \frac{\omega_1^2}{\mu^2 \omega^2}.$$

Pour que le liquide remplisse l'ajutage comme on l'a supposé, ou que l'écoulement ait lieu à *gueule bée*, il faut que la pression p soit positive, ou que

$$\frac{\omega_1}{\omega} < \mu \sqrt{1 + \frac{p_0}{\Pi h}},$$

inégalité dans laquelle on peut prendre $\mu = 0,62$.

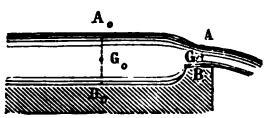
Si cette condition n'est pas remplie, la partie inférieure de l'ajutage deviendra un *coursier*.

178. *Débit par un déversoir.* — Considérons un canal horizontal à section rectangulaire, barré par un mur peu épais à sa partie supérieure qui est arasée horizontalement, par dessus lequel l'eau peut s'écouler; nous aurons ce qu'on appelle un *déversoir*.

L'expérience fait connaître que le liquide, avant de passer sur le seuil du déversoir, éprouve une dénivellation notable.

Soient (*fig.* 73)

Fig. 73.



V_0 la vitesse des molécules qui traversent la section A_0B_0 du canal dont G_0 est le centre de gravité;

V la vitesse sur le seuil du déversoir ou dans la section AB dont G est le centre de gravité;

l la largeur du déversoir;

z_0, z les hauteurs de A_0, A au-dessus de G_0, G;

ζ la dénivellation ou la hauteur de A_0 au-dessus de A;

φ le débit.

La pression est la même sur A_0B_0, AB qu'à l'état statique, attendu que les petits liquides sont animés d'un mouvement

rectiligne et uniforme, que, par suite, les forces extérieures se font équilibre sur chaque molécule d'un filet et enfin que les pressions que ce filet supporte de la part des filets voisins sont les mêmes que si le liquide était en repos. Au bout du temps dt les molécules qui se trouvaient dans les sections A_0B_0, AB sont venues dans des sections infiniment voisines $A'_0B'_0$, $A'B'$, et le principe de la force vive donne

$$\frac{\Pi Q}{2g}dt(V^2 - V_0^2) = \Pi Q\,dt(z + \zeta - z_0) + (p_a + \Pi z_0)Q\,dt - (p_a + \Pi z)Q\,dt,$$

d'où

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2g\zeta}.$$

Supposons qu'on puisse mesurer la hauteur h de A_0 au-dessus du seuil du déversoir. Nous aurons pour le débit

$$Q = l(h - \zeta)\sqrt{V_0^2 + 2g\zeta}.$$

Analytiquement, le problème n'est pas soluble puisqu'il dépend de deux quantités h, ζ, qui doivent être liées entre elles par une loi que nous ne connaissons pas : mais si nous admettons, ce qui est plus ou moins contestable, que les phénomènes naturels correspondent toujours à des conditions de maxima ou de minima, il vient pour la valeur de ζ, qui rend Q maximum,

$$\zeta = \frac{h}{3} - \frac{V_0^2}{3g};$$

par suite, en posant $\frac{V_0^2}{2g} = h_0$,

$$Q = \frac{2}{3}l(h + h_0)\sqrt{\frac{2}{3}(h + h_0)} = 0{,}385\,l(h + h_0)\sqrt{2g(h + h_0)}.$$

D'après les expériences de Poncelet et de Lesbros, le coefficient de dépense irait en diminuant quand h augmente, mais ne varierait qu'entre 0,424 et 0,385. En pratique, on emploie la formule

$$Q = 0{,}42\,l(h + h_0)\sqrt{2g(h + h_0)}.$$

Il est facile de mesurer h au moyen d'une règle et d'un niveau; V_0 et par suite h_0 (qui n'entre que comme élément

de correction et qu'il suffit d'évaluer par approximation) peut se déterminer au moyen d'un flotteur en chêne qui donne la vitesse au niveau, peu différente de la vitesse moyenne, comme nous le verrons plus loin.

179. *De l'écoulement par une vanne.* — On emploie la formule

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gh}.$$

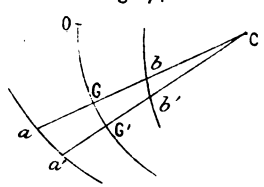
L'expérience donne, pour la valeur du coefficient de dépense :

	μ
Vanne verticale, contraction sur 4 côtés	0,60
» » 3 »	0,63
» » 2 »	0,65
» » 1 »	0,69
Vanne inclinée de 60°.....	0,75
» 45°.....	0,80
Vanne d'écluse.....	0,63

180. *Mouvement varié dans un tuyau.* — Le volume intérieur d'un *tuyau* est engendré par une aire plane constante ou variable qui se déplace normalement à la ligne donnée (*axe du tuyau*) que son centre de gravité est assujetti à décrire. Nous supposerons que l'axe est plan et que le tuyau est symétrique par rapport à son plan. Nous ne ferons, jusqu'à nouvel ordre, aucune hypothèse sur la nature du fluide pesant qui se meut dans le tuyau.

Soient (*fig.* 74)

Fig. 74.



$\overline{OG} = s$ une portion de l'axe du tuyau mesurée à partir d'un point déterminé O ;

$\overline{OG'} = s + ds$;

ab, $a'b'$ les traces sur le plan de l'axe des sections ω, $\omega + d\omega$, en G, G' déterminant par leur rencontre le centre de courbure C.

On admet que les molécules situées à l'instant t dans la section ω viennent à l'instant $t + dt$ se placer dans la section $\omega + d\omega$.

Soient, à l'instant t, la vitesse G qui est tangente à l'axe; v la composante normale de la vitesse qui traverse un élément $d\omega$ de ω situé à la distance ζ de l'axe projeté en G, cette distance étant positive quand elle est dirigée dans le sens de GC. On a, par hypothèse,

$$v\,dt = V\,dt \times \frac{CG - \zeta}{CG},$$

d'où

$$\int v\,d\omega\,dt = V\omega\,dt$$

pour le volume de la *tranche* $abaa'b'$.

Soient

ρ la densité moyenne de la tranche, dont nous représenterons momentanément la masse par m;

$\Pi = \rho g$ son poids spécifique;

p, $p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$ les pressions moyennes sur ab, $a'b'$.

Les pressions sur ab, $a'b'$ donnent, suivant GG', la résultante

$$p\,d\omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right)(\omega + d\omega) = -\omega \frac{\partial p}{\partial s} ds - p\,d\omega.$$

La réaction de la paroi (aa', bb') donnant la composante $p\,d\omega$, on a, en résumé, pour la résultante des pressions,

$$-\omega \frac{\partial p}{\partial s} \partial s = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}.$$

Nous avons donc

$$m \frac{dV}{dt} = m\gamma \cos(g, ds) - \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s},$$

d'où

$$\frac{dV}{dt} = g \cos(g, ds) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}.$$

On remarquera que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}.$$

D'autre part, si z est la distance de G au plan horizontal passant par O, on a aussi

$$\cos(g, ds) = \frac{dz}{ds}.$$

Nous avons donc

$$\text{(A)} \qquad V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} = g\frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Soient ω_0, ω_1 deux sections déterminées correspondant aux longueurs s_0, s_1 de l'axe; nous affecterons des mêmes indices les autres quantités correspondantes qui se rapportent à l'époque t; nous avons $V = \omega_1 \frac{V_1}{\omega}$, et l'équation (A) peut décrire

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial V^2}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial V_1}{\partial t}\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\Pi}\frac{\partial p}{\partial s},$$

d'où

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} + \frac{\omega_1}{g}\frac{\partial V_1}{\partial t}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} = z_1 - z_0 + \frac{1}{\Pi}(p_0 - p_1)$$

ou

$$\text{(B)} \qquad \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{\omega_1}{g}\frac{dV_1}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\omega} = z_1 - z_0 + \frac{1}{\Pi}(p_0 - p_1),$$

équation qui fera connaître V_1 en fonction de t.

En faisant $\frac{\partial V_1}{\partial t} = 0$, on retombe sur l'équation connue du mouvement permanent.

Considérons un liquide contenu dans un vase symétrique par rapport à une verticale et supposons que l'écoulement ait lieu par un ajutage cylindrique très court, c'est-à-dire d'une longueur seulement suffisante pour que, à la sortie, les vitesses soient sensiblement parallèles. Nous supposerons que ω_0 se rapporte au niveau et ω_1 à l'orifice; comme ici $s = z$, $p_1 = p_0$, l'équation (B) devient

$$\text{(C)} \qquad \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{\omega_1}{g}\frac{dV_1}{dt}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\omega} = z_1 - z_0.$$

Admettons d'abord que le niveau soit maintenu constant, et plaçons l'origine des z dans son plan. Nous avons $z_0 = 0$ et, en désignant par k la quantité constante $\frac{\omega_1}{g}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\omega}$,

$$\frac{V_1^2}{2g}\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)+k\frac{dV_1}{dt}=z_1.$$

Si nous posons

$$a=\frac{2gk}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}},\qquad V'_1=\sqrt{\frac{2gz_1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}},$$

l'équation précédente devient

$$dt=a\frac{dV}{V'^2-V_1^2},$$

d'où, en désignant par ε une constante,

$$t+\varepsilon=\frac{a}{2V'_1}\log\frac{V'_1+V_1}{V'_1-V_1}$$

et

$$V_1=V'_1\frac{1-e^{-2\frac{V'_1}{a}(t+\varepsilon)}}{1+e^{-2\frac{V'_1}{a}(t+\varepsilon)}}.$$

Au bout d'un certain temps, d'autant plus court que a ou ω_1 sera plus petit, les exponentielles qui entrent dans V_1 seront insensibles; de sorte que V_1 convergera vers la vitesse V'_1 répondant au mouvement permanent qui sera ainsi rapidement atteint.

Supposons maintenant que le vase se vide et que sa forme soit celle d'un prisme vertical. On a $\omega=\omega_0$ et, en désignant par h la hauteur du niveau au-dessus du fond du vase, l'équation (C) nous donne

$$V_1^2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)+2\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{dV_1}{dt}h=2gh.$$

De la relation

$$V_0=-\frac{dh}{dt}=V_1\frac{\omega_1}{\omega_0},$$

on déduit

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{dh}\frac{dh}{dt} = -\frac{\omega_1}{\omega_0}V_1\frac{dV_1}{dh},$$

et l'équation ci-dessus devient

$$V_1^2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}h\frac{dV_1^2}{dh} = 2gh,$$

d'où, en désignant par C une constante,

$$V_1^2 = Ch^{\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}-1} + \frac{2gh}{1-2\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}.$$

Si h_0 est la profondeur du liquide au repos, il paraît résulter de l'expérience que, lorsqu'on démasque brusquement l'orifice, la vitesse V_1 prend immédiatement la valeur $\sqrt{\frac{2gh_0}{1-2\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}}$, de sorte qu'on aurait $C=0$ et que la durée de l'abaissement h_0-h du niveau serait

$$t = -\frac{\omega_0}{\omega_1}\int_{h_0}^{h}\frac{dh}{V_1} = \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{\frac{2\left(1-2\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)}{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}).$$

Cette formule, en y faisant $h=0$, ferait connaître le temps au bout duquel le vase se sera vidé. Toutefois, nous devons faire remarquer que ce qui précède suppose que h ne descend pas au-dessous d'une certaine limite à partir de laquelle, par suite d'un entonnoir qui se forme dans la région de l'orifice, l'hypothèse du parallélisme des tranches n'est plus admissible.

181. *Principe de Borda.* — Lorsque la vitesse des filets liquides varie brusquement en grandeur et en direction, comme cela arrive notamment quand la section d'un tuyau éprouve un élargissement brusque, il se produit des tourbillonnements avant que le liquide reprenne un mouvement régulier. La force vive que possède le liquide avant l'élargis-

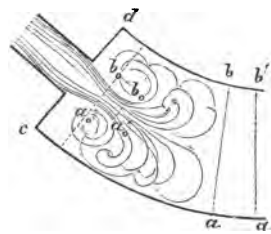
sement se décompose au delà en deux parties; l'une est due aux vitesses rotatoires des molécules qui produisent les tourbillonnements et qui est bientôt détruite par l'effet de résistances analogues au frottement; l'autre est celle du fluide lorsque, de nouveau, il se meut de telle manière que les molécules qui se trouvent dans une section se trouvent encore au bout du temps dt dans une section infiniment voisine.

En considérant les tourbillonnements comme le résultat du choc d'une masse fluide contre une autre animée d'une moindre vitesse, et en assimilant le choc à celui de deux corps mous, Borda a été conduit à poser en principe que de ce changement de mouvement doit résulter *une perte de force vive due aux vitesses perdues*. Cette extension donnée ainsi au théorème de Carnot est très contestable; car il s'en faut que le même raisonnement puisse s'appliquer dans deux circonstances aussi différentes.

Mais on peut justifier, ainsi qu'il suit, le principe dont il s'agit.

Soient (*fig.* 75)

Fig. 75.



$\overline{a_0 b_0} = \omega_0$ la section contractée de la veine fluide à son entrée dans la partie élargie du tuyau;

$\overline{ab} = \omega$ la section de cette partie à partir de laquelle le mouvement commence à devenir régulier;

V_0, V les vitesses, p_0, p les pressions dans les sections ω_0, ω;

$acdb$ la position élargie de la paroi limitée à la section ω, et qui vient rejoindre la partie antérieure du tuyau.

Nous admettrons que, dans la masse tourbillonnante, la pression est sensiblement p_0 jusqu'à une petite distance de la

section ab (dans l'étendue de laquelle la pression devient assez rapidement égale à p pour qu'on puisse considérer la transition comme ayant lieu brusquement).

Soient U la vitesse perdue entre $a_0 b_0$ et $\overline{ab}$ et u sa projection sur la direction de V; on a

$$(a) \qquad V_0^2 = V^2 + U^2 + 2Vu.$$

Au bout du temps dt, les molécules qui se trouvaient dans $a_0 b_0$, ab sont venues respectivement dans $a'_0 b'_0$, $a'b'$; et en appelant m la masse de $a_0 b_0 a'_0 b'_0 = ab a' b'$, où

$$\frac{\Pi}{g}\omega V\,dt = \frac{\Pi}{g}\omega_0 V_0\,dt,$$

l'accroissement de la quantité de mouvement en projection sur la direction de V est

$$-mu = -\frac{\Pi}{g}V\omega u\,dt,$$

en remarquant que la quantité de mouvement de la partie commune $a'_0 b'_0 ab$ n'a pas changé. Nous avons donc, en désignant par q le poids du liquide compris entre $a_0 b_0$ et ab,

$$-\frac{\Pi}{g}V\omega u dt = (p_0\omega - p\omega)\,dt + q\cos(g, V)\,dt;$$

d'où

$$-\frac{Vu}{g} = \frac{p_0 - p}{\Pi} + \frac{q}{\omega\Pi}\cos(g, V),$$

et l'équation (a) devient

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_0 - p}{\Pi} - \frac{U^2}{2g} + \frac{q}{\omega\Pi}\cos(g, V).$$

Comme la distance entre $\overline{cd}$ et $\overline{ab}$ est petite, on peut admettre que ces deux sections sont égales, et, par suite, $\frac{q}{\omega\Pi}\cos(g, V)$ n'est autre chose que la hauteur z du centre de gravité de cd ou $a_0 b_0$ au-dessus de celui de ab. On a donc

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p_0 - p}{\Pi} - \frac{U^2}{2g},$$

équation qui est la traduction du principe de Borda, et dans laquelle z peut toujours être négligé.

Si l'axe de l'élargissement est rectiligne et se trouve dans le prolongement de celui du tuyau d'arrivée, on a

$$U = V_0 - V$$

et, par suite,

$$\frac{V(V - V_0)}{g} = \frac{p_0 - p}{\Pi}.$$

182. *Écoulement d'un liquide, maintenu à niveau constant dans un vase, par un ajutage cylindrique.* — Nous supposerons l'ajutage horizontal et assez court pour qu'il n'y ait pas lieu de faire intervenir le frottement dont nous nous occuperons plus loin.

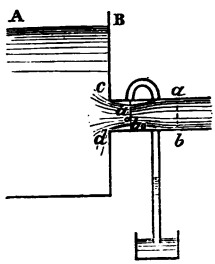
Soient (*fig.* 76)

AB le niveau du liquide;

h sa hauteur au-dessus du centre de gravité de la section ω du tube;

$\omega_0 = \mu\omega$ la section contractée $\overline{a_0 b_0}$ de la veine, qui est située à une petite distance de la naissance $\overline{cd}$ du tube.

Fig. 76.



Un peu au delà de $\overline{a_0 b_0}$, en $\overline{ab}$, le liquide remplit complètement le tube, en prenant une vitesse plus faible, d'où une perte de force vive dont il y a lieu de tenir compte.

Soient p la pression atmosphérique qui s'exerce sur AB et ab; p_0 la pression sur ω_0; V, V_0 les vitesses dans $\overline{ab}$, $\overline{a_0 b_0}$. Le niveau étant censé assez étendu pour qu'on puisse négliger

la vitesse des molécules qui s'y trouvent, nous avons

$$(1) \qquad V_0 = \frac{V}{\mu},$$

$$(2) \qquad \frac{V_0^2}{2g} = h + \frac{p - p_0}{\Pi},$$

$$(3) \qquad \frac{V^2}{2g} = h - \frac{(V_0 - V)^2}{2g};$$

d'où, en vertu de (1) et (3),

$$V = m\sqrt{2gh},$$

en posant

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2}}.$$

Si l'on prend $\mu = 0{,}62$ (orifice en mince paroi), on trouve $m = 0{,}85$, chiffre qui diffère peu de la valeur 0,82 donnée par l'expérience.

La formule (2) donne

$$\frac{p - p_0}{\Pi} = \left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)h$$

et, en prenant $m = 0{,}82$, $\mu = 0{,}62$,

$$\frac{p - p_0}{\Pi} = 0{,}75h.$$

La pression sur $a_0 b_0$ est donc inférieure à la pression atmosphérique, ce qui est conforme à une expérience du P. Venturi, qui, en adaptant à l'ajutage un tube qui venait plonger dans un vase, a reconnu que l'eau du vase s'élevait dans le tube à une hauteur $\frac{p - p_0}{\Pi} = 0{,}74h$.

Cette perte de pression dans la section contractée explique le jeu des *trompes*, et le tirage dans les cheminées des locomotives produit par l'échappement de la vapeur.

Lorsqu'on veut élever le niveau d'un canal, déjà barré par un certain nombre de poutrelles superposées, il suffit de jeter en deçà une autre poutrelle, de manière qu'elle reste normale au fil de l'eau : cette poutrelle, arrivée au-dessus des autres,

détermine un ajutage cylindrique, d'où une diminution de pression qui a pour effet de faire tomber brusquement la poutrelle sur la crête du barrage dont le niveau se trouve ainsi exhaussé.

§ II. — Du frottement d'un liquide dans un tuyau.

183. Il se développe au contact du liquide avec le tuyau une résistance ou *frottement,* qui ne devient importante que pour de longues conduites, et c'est pourquoi jusqu'ici on a fait abstraction de cette résistance.

Soient σ le périmètre de la section du tuyau répondant à l'arc s de l'axe; V la vitesse moyenne dans cette section.

On a été conduit à représenter le frottement d'une tranche élémentaire par une expression de la forme

$$\Pi \sigma f(V)\, ds,$$

et son travail élémentaire est

$$\Pi \sigma f(V)\, ds\, V\, dt = \frac{\sigma}{\omega} f(V) g\, ds\, m,$$

m étant la masse fluide débitée dans le temps dt. En introduisant dans l'équation de la force vive le travail total de la résistance sur la longueur l du tuyau, nous aurons

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = mgz + \frac{p_0 - p}{\Pi} mg - mg \int_0^l \frac{\sigma}{\omega} f(V)\, ds$$

ou

$$(1) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z + \frac{p_0 - p}{\Pi} - \int_0^l \frac{\sigma}{\omega} f(V)\, ds.$$

Concevons que l'on adapte au tuyau deux tubes verticaux, non fermés par le haut, aux points correspondant aux vitesses V_0, V; le liquide s'élèvera dans les deux tubes dits *piézomètres* et il est facile de voir que $z + \frac{p_0 - p}{\Pi}$ sera la différence de hauteur ζ des niveaux dans le tube supérieur et le tube inférieur.

En assimilant σ, ω au périmètre et à la surface d'un cercle dont le diamètre dit *moyen* serait D, on aura

$$\frac{\sigma}{\omega} = \frac{4}{D}$$

et

$$(2) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = \zeta - 4\int_0^l f(V)\frac{ds}{D}.$$

S'il y a des pertes de charge dues à des élargissements brusques, il faudra les introduire dans le second membre de l'équation précédente, conformément à la règle de Borda.

Considérons le cas où la section est uniforme, qui est celui dans lequel on s'est placé pour déterminer la forme de $f(V)$, et désignons par I le rapport $\frac{\zeta}{l}$ ou la *perte de charge* par mètre courant; l'équation (2) nous donne

$$(2') \qquad \zeta = \frac{4l}{D} f(V)$$

ou

$$(3) \qquad \frac{DI}{4} = f(V).$$

On a été conduit à prendre

$$f(V) = aV + bV^2,$$

expression dans laquelle les constantes a, b dépendent de la nature et de l'état de la surface du tuyau.

Lorsque la section est circulaire, on a, d'après Darcy, en désignant par R le rayon,

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{32}{10^6} + \frac{376}{10^{11}R^2} \\ b &= \frac{443}{10^6} + \frac{62}{10^7 R} \end{aligned}\right\} \text{ pour les tuyaux recouverts de dépôts,}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{507}{10^6} + \frac{647}{10^8 R} \end{aligned}\right\} \text{ pour les tuyaux qui ont quelque temps d'usage.}$$

Si R est compris entre 0,03 et 0,50, comme les limites de b sont

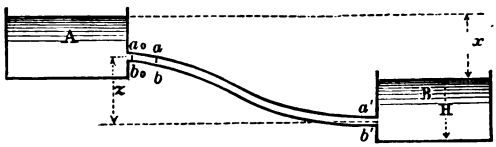
$\frac{723}{10^6}$, $\frac{520}{10^6}$, on peut supposer que ce coefficient est constant et égal à sa moyenne valeur $\frac{622}{10^6}$.

Lorsque les tuyaux sont en fonte neuve, le coefficient b doit être réduit de moitié environ.

184. *Écoulement, par un tuyau, d'un liquide d'un réservoir dans un autre, tous deux maintenus à niveau constant.* — Ce problème se présente fréquemment dans les questions d'établissement des fontaines publiques. La section du tuyau est censée constante.

Soient (*fig.* 77)

Fig. 77.



H, H′ les hauteurs des niveaux dans les réservoirs d'alimentation A et de réception B au-dessus des centres de gravité des sections du tuyau au départ et au débouché;

p_0 la pression atmosphérique;

p la pression dans la section ab située immédiatement au delà de la contraction;

p' la pression au débouché $a'b'$;

V la vitesse dans le tuyau.

Nous avons (n° 182)

$$V = 0,82\sqrt{2gH + 2g\frac{(p_0 - p)}{\Pi}},$$

d'où

$$\frac{p_0 - p}{\Pi} + H = 1,49\frac{V^2}{2g}.$$

D'autre part

$$p' = \frac{p_0}{\Pi} + H',$$

par suite

$$\frac{p - p'}{\Pi} = H - H' - 1,49\frac{V^2}{2g}.$$

Soient

x la différence de hauteur des niveaux de A, B;

z la hauteur du centre de gravité de $\overline{ab}$ au-dessus du centre de gravité de $a'b'$;

$\zeta = \frac{p-p'}{\Pi} + z$ la différence des hauteurs piézométriques en ab, $a'b'$.

En ajoutant z aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\zeta = x - 1,49\frac{V^2}{2g}$$

ou, en substituant à ζ sa valeur (2') du numéro précédent,

$$x = \frac{4l}{D}(aV + bV^2) + 1,49\frac{V^2}{2g}.$$

Si, comme on le fait d'habitude, on néglige le terme $1,49\frac{V^2}{2g}$, qui est ordinairement très petit, on a $\zeta = x$, et il suffit d'appliquer la formule (3), dans laquelle I désigne alors la pente par mètre courant calculée en raison de la différence des niveaux dans les réservoirs. Cette formule permettra de déterminer D quand x sera donné, et inversement.

Les règles relatives à l'établissement des embranchements d'une conduite étant purement empiriques et très contestables, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter. Nous renverrons, pour cet objet, aux Ouvrages de Mécanique pratique et aux aide-mémoire.

§ III. — De l'influence d'un coude dans un tuyau.

185. Un coude vif dans un tuyau donne lieu à une perte de charge qu'on évaluera en faisant l'application du principe de Borda.

Supposons que les deux branches aient le même diamètre et qu'elles fassent entre elles l'angle α. La vitesse perdue

étant $2V\cos\frac{\alpha}{2}$, la perte de charge sera $\frac{V^2}{2g}4\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Ainsi, si le coude est de 90°, la perte de charge est le double de la hauteur due à la vitesse; on voit ainsi combien il est important d'éviter les coudes vifs et de n'employer autant que possible que des coudes d'une grande ouverture.

Il semblerait *a priori* qu'un coude raccordant d'une manière continue les deux branches d'un tuyau ne devrait pas donner lieu à une perte de charge. Néanmoins, quelques expériences de Dubuat ont démontré qu'il n'en est pas ainsi. Les résultats qu'il a obtenus ont conduit à représenter la perte de charge par la formule d'interpolation

$$\frac{V^2}{2g}(0{,}0039 + 0{,}0186R)\frac{C}{R^2},$$

dans laquelle R est le rayon de l'arc moyen du coude et C la longueur de cet arc.

On a reconnu qu'un coude n'a aucune influence appréciable sur le mouvement lorsque son rayon est au moins égal à dix fois le diamètre du tuyau.

§ IV. — Du mouvement d'un liquide dans un canal découvert.

186. L'hypothèse des tranches appliquée au mouvement de l'eau dans un canal découvert n'est admissible, en vue de l'exactitude qu'on veut obtenir, qu'en introduisant un certain coefficient de correction.

Soient

v la vitesse réelle du courant dans l'élément $d\omega$ d'une section ω du canal;
V la vitesse moyenne dans cette section;
Q le débit.

On a

$$Q = \int v\,d\omega = V\omega$$

et, en posant $v = V + \varepsilon$,

$$\int \varepsilon\,d\omega = 0.$$

La force vive du liquide qui traverse ω dans le temps dt est

$$\int \frac{\Pi}{g} v\, dt\, d\omega\, v^2 = \frac{\Pi\, dt}{g} \int v^3\, d\omega = \frac{\Pi\, dt}{g} \int (V^3 + 3V^2\varepsilon + 3V\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\, d\omega$$
$$= \frac{\Pi}{g} Q\, dt\, V^2 + \frac{\Pi\, dt}{g} \int \varepsilon^2 (3V + \varepsilon)\, d\omega$$
$$= \frac{\Pi}{g} Q\, dt\, V^2 + \frac{\Pi}{g} \int_0 \varepsilon^2 (2V + v)\, d\omega.$$

Elle est aussi plus grande que celle qui est due à la vitesse moyenne V. Nous la représenterons par

$$\alpha \frac{\Pi}{g} QV^2\, dt,$$

α étant un coefficient plus grand que l'unité et qu'on déduira de l'expérience. D'après Vauthier, on aurait

$$\alpha = 1,03 \quad \text{pour} \quad V = 1,50,$$
$$\alpha = 1,10 \quad \text{pour} \quad V = 0,25.$$

Des expériences plus récentes de Bazin et qui sont d'une grande précision ont conduit cet ingénieur à établir la formule

$$\alpha = 1 + 1,07 \left(\frac{W}{V} - 1\right)^2,$$

dans laquelle W représente la vitesse à la surface. Pour les limites $\frac{W}{V} = \frac{2}{3}$, $\frac{W}{V} = \frac{4}{5}$ qui généralement ne sont pas dépassées, on obtient respectivement $\alpha = 1,119$, $\alpha = 1,043$. On pourra donc, sans grande erreur, prendre constamment $\alpha = 1,10$.

187. *Formules générales relatives au mouvement d'un liquide dans un canal.* — Nous supposerons que les sections ω sont normales au lieu géométrique de leurs centres de gravité. Si cette ligne n'est pas comprise dans un plan vertical, la *fig.* 78 représentera le développement de la section faite par le cylindre vertical passant par cette ligne.

Soient

G_0, G les centres de gravité des sections ω_0, ω représentées par $\overline{A_0B}$, $\overline{AB}$.

I_0, I les intersections des verticales de G_0, G avec le plan horizontal de A_0;

K, H les intersections de GI avec le plan horizontal de G_0 et la surface libre;

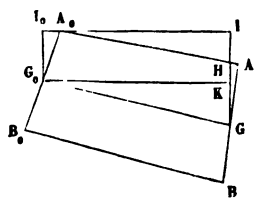
$\overline{IH} = z$ la dénivellation entre A_0 en A;

σ la *portion mouillée* du périmètre de ω;

$\frac{\omega}{\sigma} = R$ ce qu'on appelle, improprement, le *rayon moyen* de cette section;

p_a la pression atmosphérique.

Fig. 78.



Les hauteurs de liquide dues aux pressions sur ω_0, ω, évaluées comme à l'état statique, sont respectivement

$$\frac{p_a + \Pi\overline{G_0I_0}}{\Pi}, \qquad \frac{p_a + \Pi\overline{GH}}{\Pi},$$

et on aura, comme pour les tuyaux, en introduisant toutefois le coefficient de correction α défini plus haut

$$\alpha\frac{(V^2 - V_0^2)}{2g} = \frac{p_a + \Pi\overline{G_0I_0}}{\Pi} - \frac{p_a + \Pi\overline{GH}}{\Pi} + \overline{GK} - \int\frac{\sigma}{\omega}f(V)\,ds$$

ou

$$(1) \qquad \alpha\frac{(V^2 - V_0^2)}{2g} = z - \int f(V)\frac{ds}{R}.$$

Bazin a été conduit à poser

$$(2) \qquad f(V) = bV^2,$$

expression dans laquelle b est un coefficient dépendant de la nature de la paroi et du rayon moyen, et il a trouvé

$$b = \frac{10^5}{10^5}\left(1 + \frac{0,03}{R}\right) \text{ pour des parois très unies,}$$

$$b = \frac{19}{10^5}\left(1 + \frac{0,07}{R}\right) \quad \text{» unies,}$$

$$b = \frac{24}{10^5}\left(1 + \frac{0,25}{R}\right) \quad \text{» peu unies,}$$

$$b = \frac{28}{10^5}\left(1 + \frac{1,25}{R}\right) \quad \text{» en terre.}$$

188. *Condition qui doit être remplie pour que le mouvement soit uniforme.* — L'équation (1) donne

$$z = f(V)\int \frac{ds}{R}. \tag{3}$$

Lorsque la section est constante on a

$$z = f(V)\frac{s}{R} \tag{4}$$

ou, en désignant par I le rapport $\frac{z}{s}$ qui a reçu le nom de *pente* ou *déclivité* par mètre de longueur,

$$RI = f(V) = bV^2, \tag{5}$$

ce qui est la condition cherchée.

189. *Relation entre la vitesse moyenne* V *et la vitesse* W *à la surface.* — On a, d'après Bazin,

$$W - V = 14\sqrt{RI}; \tag{6}$$

de sorte que, connaissant RI, et W ayant été déterminé au moyen du temps employé par un flotteur pour parcourir une certaine longueur du canal, on pourra calculer V et, par suite, le débit du courant.

190. *Du mouvement varié.* — Lorsque la condition (4) n'est pas remplie, le mouvement est varié et il faut revenir à

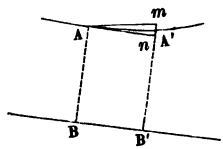
l'équation (1) qui donne par la différentiation

$$(7) \qquad dz = \alpha \frac{V dV}{g} + \frac{1}{R} f(V)\, ds.$$

Nous allons considérer le cas spécial où le lit du cours d'eau a la forme d'un prisme dont la section est rectangulaire.

Soient (*fig.* 79)

Fig. 79.



$\overline{A'B'}$ la section infiniment voisine de $\overline{AB}$ et, par conséquent, $\overline{BB'} = ds$;

$h = \overline{AB}$ la profondeur du cours d'eau en A;

i la pente uniforme du fond BB', censée assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré;

λ la largeur du courant;

m, n les intersections avec $\overline{A'B'}$ de l'horizontale en A et de la parallèle au même point à BB'.

On a

$$\overline{A'n} = dh, \quad \overline{A'm} = \frac{dz}{\cos i} = dz, \quad \overline{mn} = ds \operatorname{tang} i = i\, ds = \overline{A'n} + \overline{A'm},$$

d'où

$$dz = i\, ds - dh.$$

D'autre part, le débit qui est censé connu, a pour expression

$$(8) \qquad Q = V \lambda h,$$

d'où

$$dV = -V \frac{dh}{h}.$$

La formule (7) devient, par suite,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{1}{R} f(V)}{1 - \alpha \frac{V^2}{gh}}, \tag{9}$$

où l'on devra faire

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{h\lambda}{2h + \lambda}, \\ V &= \frac{Q}{\lambda h}, \\ f(V) &= bV^2, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

de sorte que l'on aura une équation de la forme

$$ds = \varphi(h)\,dh,$$

d'où, par l'intégration, l'équation du profil du niveau.

Nous allons discuter l'équation (9) en examinant successivement les quatre cas qui peuvent se présenter.

Premier cas : Pour une valeur déterminée de h, on a

$$\left\{\begin{aligned} & i - b\frac{V^2}{R} > 0, \\ & 1 - \alpha\frac{V^2}{gh} > 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

La dérivée $\frac{dh}{ds}$ étant positive, h croît, V décroît, de sorte que, *a fortiori*, les inégalités précédentes seront satisfaites pour les valeurs successives de h.

La première d'entre elles donne, en ayant égard aux relations (8) et (10),

$$h^3\lambda^3 i - 2Q^2 bh - Q^2 b\lambda > 0$$

et h est supérieur à la racine positive de cette inégalité transformée en équation, c'est-à-dire à la hauteur constante correspondant au mouvement uniforme; il suit de là que le profil de la surface liquide sera situé au-dessus de la droite qui répond au mouvement uniforme et ira constamment en s'élevant au-dessus de cette ligne. Les seconds termes du

numérateur et du dénominateur de (9) devenant de plus en plus petits, il arrivera qu'ils pourront être négligés et qu'on aura sensiblement $\frac{dh}{ds} = i$ ou

$$ids - dh = 0 = dz,$$

c'est-à-dire que le niveau sera horizontal, ce qui devait être, puisque, la vitesse étant censée nulle, on rentre dans les conditions de l'équilibre. Le profil du niveau sera donc continu et aura une asymptote horizontale.

Les conditions (11) seront le plus souvent remplies; en effet, on en tire

$$1 - \alpha \frac{V^2}{gh} > 1 - \frac{\alpha i}{gb} \frac{R}{h}$$

et, *a fortiori*, puisque $\frac{R}{h} < 1$,

$$1 - \alpha \frac{V^2}{gh} > 1 - \frac{\alpha i}{gb},$$

ou, en prenant les valeurs usuelles $b = 0,0004$, $\alpha = 1,10$,

$$1 - \alpha \frac{V^2}{gh} > 1 - \frac{i}{0,00357}.$$

Pour que le second membre de cette inégalité soit positif comme le premier qui l'est par hypothèse, il suffit que $i < 0,00357$ soit une pente de $3^m,57$ par kilomètre, qui est rarement atteinte par les cours d'eau non torrentiels.

Deuxième cas :

$$i - b \frac{V^2}{R} < 0,$$

$$1 - \alpha \frac{V^2}{gh} > 0.$$

La hauteur h décroîtra et par suite V croîtra, la première inégalité restera toujours satisfaite; mais le premier membre de la seconde allant toujours en décroissant, il arrivera que

$$1 - \alpha \frac{V^2}{gh} = 0.$$

On voit ainsi que le profil du niveau s'éloigne constamment de la droite qui répond au mouvement uniforme, au-dessous de laquelle il est entièrement situé, et que pour une certaine valeur h' de h, répondant à $s = s'$, la tangente est perpendiculaire au fond du canal. Comme l'hypothèse des tranches est incompatible avec ce résultat, il faut que, à partir d'une valeur de s plus petite que s' ou d'une valeur de h plus grande que h' il y ait discontinuité dans le mouvement, et, effectivement, le liquide prend une forme arrondie (*fig.* 80) et vient, en tourbillonnant, rencontrer la masse liquide d'aval

Fig. 80.

animée d'une moindre vitesse; c'est ce qu'on appelle un *ressaut d'abaissement.*

Troisième cas :

$$i - b\frac{V^2}{R} < 0,$$

$$1 - \alpha\frac{V^2}{gh} < 0.$$

La hauteur h croîtra et V décroîtra. Il arrivera donc qu'on s'arrêtera à l'une ou l'autre des deux égalités

$$i - b\frac{V^2}{R} = 0,$$

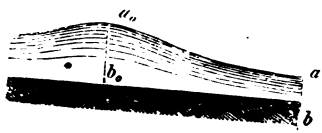
$$1 - \alpha\frac{V^2}{gh} = 0.$$

Si c'est la première qui est satisfaite avant la seconde, le profil restera continu et sa tangente sera parallèle au fond, dans une certaine section $\overline{a_0 b_0}$ (*fig.* 81); au delà de $\overline{a_0 b_0}$, $i - \frac{bV^2}{R}$ deviendra positif et l'on rentrera dans le cas précédent.

Si c'est la seconde égalité qui se trouve vérifiée la première, la tangente deviendra normale au fond, en un certain point

du profil, ce qui est inadmissible pour les mêmes motifs que ceux que nous avons donnés plus haut.

Fig. 81.



Il y a effectivement, pour une valeur moindre de s, discontinuité dans le mouvement; la masse d'amont vient heurter la masse d'aval animée d'une moindre vitesse, en donnant lieu à des tourbillonnements, de sorte que le niveau éprouve une surélévation brusque. Il se produit ainsi ce qu'on appelle un *ressaut d'élévation* qui sera étudié plus loin.

Quatrième cas :

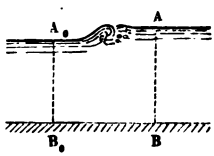
$$i - b\,\frac{V^2}{R} > 0,$$

$$1 - \alpha\,\frac{V^2}{gh} < 0.$$

La hauteur h décroîtra, V croîtra; le dénominateur de $\frac{dh}{ds}$ sera toujours négatif; mais il arrivera que le numérateur s'annulera et alors la tangente au profil sera parallèle au fond dans une section ab (*fig.* 81); au delà le numérateur devenant négatif, on rentrera dans le cas précédent.

191. *Des ressauts d'élévation* (*fig.* 82). — Supposons que le

Fig. 82.



canal soit horizontal; que A_0B_0, AB soient les sections qui précèdent et suivent immédiatement le ressaut.

Soient u la hauteur de A au-dessus de A_0; V_0, V les vitesses moyennes dans les sections $\overline{A_0B_0}$, $\overline{AB}$, dont h_0 h représentent les hauteurs. Nous appliquerons ici, par extension, le principe de Borda, en faisant remarquer que la perte de force vive doit être affectée du coefficient α. Nous aurons alors, en suivant la voie du n° 187,

$$\alpha \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = -u - \alpha \frac{(V_0 - V)^2}{2g};$$

d'où, en substituant $u = h - h_0$, $V = \frac{V_0 h_0}{h}$,

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\alpha \frac{V_0^2}{gh_0}}.$$

En exprimant que ce rapport est supérieur à l'unité, on retombe sur l'une des inégalités du troisième cas du numéro précédent, ce qui est une justification de l'extension donnée au principe de Borda.

Les ressauts se produisent dans bien des circonstances, notamment à l'amont d'un obstacle transversal placé dans le lit du courant remplissant certaines conditions, au delà du débouché des vannes, etc.

192. *Des pertes de force vive dues à des élargissements brusques des sections des canaux.* — Ces pertes s'évalueront de la même manière que dans le cas des tuyaux, en donnant ainsi de l'extension au principe de Borda, comme nous l'avons déjà fait au numéro précédent.

Considérons par exemple ce qui se produit lors du passage de l'eau sous un pont d'une seule arche dont les culées ont rétréci le lit du cours d'eau.

L'eau, en entrant sous l'arche, éprouve d'abord une contraction, et prend une vitesse plus considérable qu'en amont, d'où une dénivellation sensible; mais, en arrivant au débouché, la section augmentant brusquement, il se produit une perte de force vive, par suite un remous et une surélévation.

En supposant que le lit du cours d'eau soit horizontal et que sa section soit rectangulaire, soient

V_0, V, V' les vitesses moyennes de l'eau en amont du pont, près du débouché, et immédiatement en aval du remous lorsque le régime régulier commence à se rétablir;
h_0, h, h' les profondeurs correspondant à ces vitesses;
λ_0 la largeur du courant en amont et en aval, et λ la distance entre les culées.

Nous aurons, en employant les mêmes raisonnements que ci-dessus,

$$(1) \qquad \alpha \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = h_0 - h$$

et

$$\alpha \frac{V'^2 - V^2}{2g} = h' - h - \alpha \frac{(V - V')^2}{2g}$$

ou

$$(2) \qquad \alpha \frac{V'(V - V')}{g} = h - h'.$$

Nous avons d'ailleurs

$$V = \frac{V_0 h_0 \lambda_0}{h\lambda}, \qquad V' = \frac{V_0 h_0}{h'},$$

et alors les équations (1) et (2) se réduiront à deux autres entre les inconnues h, h', et qui, par suite, feront connaître la dénivellation $h_0 - h'$.

193. *Description sommaire des procédés le plus généralement employés pour jauger un cours d'eau.* — Nous ne reviendrons pas sur le procédé du déversoir (n° 178) pour déterminer le débit d'un cours d'eau, c'est-à-dire en faire le *jaugeage*, et qui n'est pas toujours applicable.

Pour déterminer le débit, il suffit de connaître la vitesse du cours d'eau dans des parties suffisamment petites d'une section perpendiculaire aux filets.

Le tout se réduit à tendre d'une rive à l'autre un cordeau gradué et de déterminer, pour chaque division, la vitesse à

différentes profondeurs, au moyen d'appareils spéciaux dont nous allons faire connaître les principaux.

1° *Tube de Pitot.* — Cet instrument consiste en tube coudé à angle droit dont on dirige une branche dans le sens opposé à celui du mouvement.

Soit h la hauteur à laquelle s'élève le liquide, au-dessus du niveau dans la branche verticale. D'après Dubuat, la vitesse V du courant est donnée par la formule

$$h = 1,19 \frac{V^2}{2g}.$$

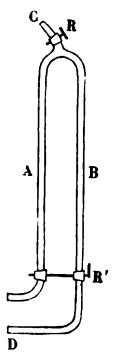
2° *Tube de Dubuat.* — Cet instrument diffère du précédent en ce que la branche horizontale est terminée par un cône en entonnoir, ce qui en rend la sensibilité plus grande. On emploiera la formule

$$h = 1,5 \frac{V^2}{2g}.$$

3° *Tube de Darcy et Baumgarten.* — La grande difficulté qui se présente, lorsqu'on fait usage des instruments précédents, consiste dans la mesure exacte de la hauteur h.

On l'évite en se servant d'un double tube (*fig.* 83) dont les

Fig. 83.



branches A, B, recourbées horizontalement, se raccordent à leur partie supérieure avec un tuyau d'aspiration C muni d'un

robinet R. L'extrémité inférieure de A est ouverte et celle de B est fermée; mais, à une petite distance de cette dernière, on a pratiqué en dessous une ouverture D, de manière que l'eau, en s'élevant dans la branche verticale, n'y indique que la pression statique.

En produisant une aspiration en C, le liquide s'élève dans A et B sans changer la différence de hauteur h des deux niveaux. On peut alors fermer un robinet R′ placé au-dessus des coudes, retirer l'appareil du courant et mesurer exactement h.

On *tare* l'appareil, c'est-à-dire qu'on détermine le coefficient k de la formule

$$h = k\frac{V^2}{2g},$$

en la déplaçant, avec une vitesse connue, dans une pièce d'eau tranquille.

4° *Pendule hydrométrique.* — Ce pendule se compose simplement d'un fil, dont la masse est négligeable, terminé par une sphère qui, sous l'action de l'eau, donne lieu à un écart angulaire α qu'on peut observer.

Soient

P le poids de la boule dans l'eau;
l la longueur du fil mesurée à partir du centre de la sphère;
kV^2 la pression du liquide sur la sphère.

On a, en prenant les moments

$$\mu V^2 l \cos\alpha = P l \sin\alpha,$$

d'où

$$V = \mu\sqrt{\operatorname{tang}\alpha},$$

μ étant un coefficient numérique relatif à chaque appareil et qu'on déterminera par expérience.

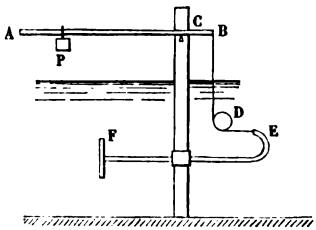
5° *Tachomètre de Brünings.* — Soit (*fig.* 84) AB un fléau de romaine dont le couteau est en C et le poids mobile P.

Un fil vertical fixé en B passe sur une poulie D et peut s'accrocher à l'une des extrémités E d'une tige horizontale,

guidée en conséquence, et terminée d'autre part par une plaque verticale sur laquelle agit normalement le courant.

Soient $k\frac{V^2}{2g}$ la pression exercée sur la plaque ; u, a les distances horizontales de P et du point B au couteau C.

Fig. 84.



Lorsqu'on a placé le poids P de manière à équilibrer la pression du fluide sur la plaque, on a

$$k\frac{V^2}{2g}a = Pu,$$

d'où

$$V = \mu\sqrt{u},$$

μ étant un coefficient spécial à chaque appareil et qu'on déterminera expérimentalement.

§ V. — De la pression exercée par un liquide en mouvement sur un corps solide fixe.

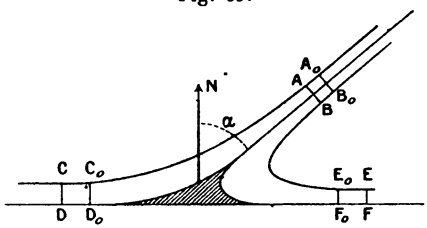
194. *Pression d'une veine fluide sur une plaque.* — Le plan de la figure est celui qui, passant par l'axe de la veine, est normal à la plaque. La plaque est censée assez étendue pour que, à une certaine distance de l'axe, les vitesses sur la plaque soient sensiblement parallèles.

Soient (*fig.* 85)

N la réaction normale de la plaque ;
α l'angle de l'axe de la veine avec N ;

V_0 la vitesse dans une section $\overline{A_0B_0} = \omega_0$ faite avant l'épanouissement de la veine.

Fig. 85.



On peut admettre que des molécules qui se trouvaient primitivement dans $\overline{A_0B_0}$ traversent successivement après l'épanouissement des cylindres normaux à la plaque tels que $(\overline{C_0D_0}, \overline{E_0F_0})$.

Au bout du temps dt, les molécules qui se trouvaient dans $\overline{A_0B_0}$ et $(\overline{C_0D_0}, \overline{E_0F_0})$ viennent respectivement dans $\overline{AB}$ et $(\overline{CD}, \overline{EF})$. En appliquant le principe de l'accroissement des quantités de mouvement et des impulsions des forces en projection sur N, on obtient

$$N\,dt - \frac{\Pi}{g}\,\omega_0 V_0\,dt.V_0 \cos\alpha = 0,$$

d'où, pour la pression égale et contraire à N,

$$N = \frac{\Pi}{g}\,\omega_0 V_0^2 \cos\alpha.$$

195. Lorsqu'une veine fluide frappe la surface d'un solide de forme quelconque, les règles de l'Hydraulique sont insuffisantes pour déterminer, en grandeur et en direction, la pression résultante. Il en est encore de même, en ce qui concerne l'intensité, lorsque, *a priori*, on connaît la direction de la pression, comme on en jugera par l'étude du cas suivant, dont on tirera cependant quelques conséquences intéressantes.

L'axe de la veine, qui est censée circulaire, coïncide avec celui d'un solide de révolution; on conservera les notations

du numéro précédent, en admettant que (C_0D_0, E_0F_0) représente la section conique ω, dans laquelle les molécules liquides sont sur le point de quitter le corps; nous désignerons par V la vitesse dans cette section et par φ l'angle de C_0D_0 avec la direction de N.

Par un raisonnement identique à celui du numéro précité, on trouve

$$N = \frac{\Pi}{g}(\omega_0 V_0^2 - \omega V^2 \cos\varphi).$$

Il suit de là que si l'angle φ est aigu, ou si la surface présente sa convexité à la veine, on a $N < \frac{\Pi}{g}\omega_0 V_0^2$; quand la veine touche la concavité on a, au contraire, $N > \frac{\Pi}{g}\omega_0 V_0^2$; ces deux résultats sont conformes à ce que l'on constate d'une manière générale.

196. *Pression d'une masse fluide en mouvement sur un solide fixe immergé.* — Dubuat et plus tard Duchemin ont reconnu, par expérience, que lorsqu'un corps est immergé, à une profondeur suffisante, dans un liquide en mouvement, il n'exerce aucune influence sur les filets situés à une distance de la surface du corps supérieure à une certaine limite. Cette limite dépend en chaque point de la forme de la surface.

On peut donc considérer le problème dont il s'agit comme se réduisant au cas où le courant serait limité par un cylindre dont la section dépend de la forme de la surface.

Soient (*fig.* 86) [1]

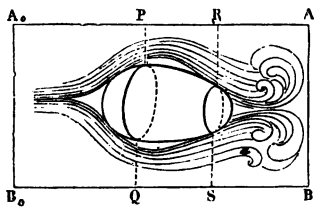
$(\overline{A_0A}, \overline{B_0B})$ le cylindre limite;
Ω_0 sa section;
V_0 la vitesse du courant;
$\overline{A_0B_0}$ une section du cylindre faite en amont avant que le corps ait modifié le mouvement du liquide;
p_0 la pression dans cette section.

---

[1] Nous nous conformons, jusqu'à nouvel ordre, aux idées de Poncelet.

Les filets en rencontrant le corps s'infléchissent; la masse fluide glisse sur la surface sur une certaine étendue, puis elle éprouve en PQ une contraction. Si la dimension maximum du corps, dans le sens du mouvement, est assez grande, le

Fig. 86.



liquide, après la contraction, reviendra glisser sur la surface jusqu'à une section $\overline{RS}$, au delà de laquelle aura lieu une perte de force vive; lorsque les tourbillons auront disparu en AB, le mouvement redeviendra régulier; comme dans les ajutages cylindriques, il y aura une vitesse moyenne perdue U entre $\overline{PQ}$ et $\overline{RS}$; et, en désignant par U′ la vitesse moyenne perdue entre $\overline{RS}$ et $\overline{AB}$, et par p la pression sur AB, nous aurons

$$\frac{p_0 - p}{\Pi} = \frac{U^2}{2g} + \frac{U'^2}{2g},$$

d'où, dans certains cas, la pression sur la surface.

Cas particuliers :

1° *Plaque très mince dont la normale fait l'angle α avec la direction du mouvement.* — Ici $\overline{PQ}$ et $\overline{RS}$ se confondent et $U = 0$.

Soient A la surface de la plaque; μ le coefficient de la contraction dans la section annulaire PQ.

La vitesse dans la section contractée sera $\dfrac{V_0 \Omega_0}{\mu(\Omega_0 - A\cos\alpha)}$ et la vitesse perdue

$$U = V_0 \left[\frac{\Omega_0}{\mu(\Omega_0 - A\cos\alpha)} - 1 \right].$$

Si K désigne le rapport $\frac{\Omega_0}{A\cos\alpha}$, nous aurons

$$p_0 - p = \Pi \frac{V_0^2}{2g}\left[\frac{K}{\mu(K-1)} - 1\right]^2.$$

La pression exercée sur la plaque sera $N = (p_0 A - pA)\cos\alpha$, ou

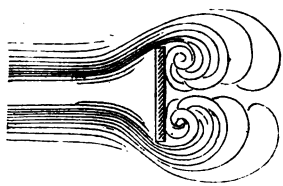
$$(a) \qquad N = \Pi \frac{V_0^2}{2g}\left[\frac{K}{\mu(K-1)} - 1\right]^2 A\cos\alpha.$$

Dubuat (*fig.* 87) a trouvé, expérimentalement, pour une plaque carrée normale au courant,

$$N = 1,86\,\Pi A \Pi \frac{V_0^2}{2g}.$$

Comme la contraction ne se produit que sur le pourtour de la plaque, le coefficient μ est supérieur à 0,62 et en supposant,

Fig. 87.



par exemple, $\mu = 0,70$, on obtient, en comparant les deux formules qui précèdent,

$$K = 2,41.$$

D'après les résultats de quelques expériences de Vince et Hutton, interpolés par Navier, on devrait, dans la formule (a), remplacer $\cos\alpha$ par

$$\cos\alpha^{1,842\sin\alpha}.$$

2° *Prisme à base carrée dont les arêtes sont dirigées dans le sens du courant.* — On supposera le prisme assez long pour que les choses se passent comme l'indique la *fig.* 88.

Il est facile de voir que

$$U = V_0 \left[\frac{K}{\mu(K-1)} - \frac{K}{K-1}\right] = V_0 \frac{K}{K-1}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right),$$

$$U' = V_0 \left(\frac{K}{K-1} - 1\right) = \frac{V_0}{K-1}.$$

On a donc, pour la pression exercée sur le prisme,

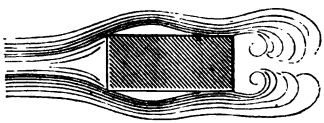
$$N = \frac{1}{(K-1)^2}\left[K^2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 + 1\right] \Pi A \frac{V_0^2}{2g}.$$

Pour un prisme à base carrée, Dubuat a trouvé

$$(b) \qquad N = 1,34 \Pi A \frac{V_0^2}{2g},$$

et, en continuant à prendre $\mu = 0,70$, on aurait $K = 1,62$.

Fig. 88.



D'après le même expérimentateur, le coefficient numérique de N augmente quand la longueur du prisme diminue, et pour un cube il a obtenu

$$N = 1,17 \Pi \Omega \frac{V_0^2}{2g}.$$

197. *De l'influence des proues et des poupes.* — Si l'on se reporte à la *fig.* 86 et à ce qui précède on reconnaîtra que, si l'on termine en amont la surface du corps par une sorte de forme ogivale (proue), le coefficient de contraction, dans $\overline{PQ}$, sera très voisin de l'unité; si, de plus, la section de la partie d'aval de la surface (poupe) diminue graduellement jusqu'à devenir insensible, les vitesses perdues U, U' resteront très petites, et par suite la pression N sera très petite.

198. *De la résistance éprouvée par un solide animé d'un mouvement translatoire dans un liquide en repos.* — Conce-

vons qu'on imprime au système matériel du numéro précédent une vitesse égale et contraire à V_0; le liquide sera ramené au repos et le solide sera animé de la vitesse V_0; N deviendra une résistance qu'on réduira par l'emploi de proue et de poupe. On explique ainsi la forme des poissons, celle des navires rapides, quoique émergés en partie.

La résultante normale éprouvée par une aire plane, d'après la formule (a) du numéro précité, sera de la forme

$$N = m\Pi \frac{V_0^2}{2g} \cos\alpha.$$

Mais généralement on admet, comme nous l'avons fait dans les quelques questions spéciales qui ont été traitées jusqu'ici, que, d'après les idées de Newton, $\cos\alpha$ doit être remplacé par $\cos^2\alpha$, c'est-à-dire que la résistance N est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse.

Il nous paraît intéressant de reproduire l'induction qui a conduit Newton à ce résultat. L'aire A, dans le temps dt, aura déplacé la masse $\frac{\Pi}{g} \cos\alpha V_0 dt$, dont la quantité de mouvement estimé suivant N est $\frac{\Pi}{g} AV_0 dt \cos\alpha V_0 \cos\alpha$; en l'égalant à $N dt$, on obtient

$$N = \frac{\Pi}{g} AV_0^2 \cos^2\alpha.$$

Mais les choses ne se passent pas exactement comme on l'a supposé, et cette valeur de N est trop faible; c'est pourquoi nous poserons

$$(c) \qquad N = m\Pi A \frac{V_0^2}{2g} \cos^2\alpha.$$

Ce qui précède s'applique au mouvement d'un fluide quelconque. Pour $\alpha = 0$, Didion a trouvé $m \frac{\Pi}{2g} = 0,084$, d'où $m = 1,272$, au lieu de $1,86$ trouvé par Dubuat, pour l'eau, dans les mêmes circonstances.

On voit ainsi que, au double point de vue théorique et ex-

périmental, il y a encore beaucoup à faire pour arriver à des connaissances à peu près certaines sur la résistance opposée par un fluide en repos sur un solide en mouvement.

En continuant à se conformer aux idées de Newton, qui ont prévalu jusqu'à présent, on suppose que la résistance éprouvée par un élément $d\omega$ de la surface d'un projectile quelconque est donnée par la formule (c), en y remplaçant A par $d\omega$, et que, quand la composante $V_0 \cos\alpha$ est négative, ou que sa direction pénètre dans le corps, il se produit une aspiration ou pression négative dont on fait abstraction; pour le surplus, nous renverrons aux Traités spéciaux de Balistique.

§ VI. — Écoulement permanent, par un orifice, d'un fluide élastique renfermé sous pression constante dans un réservoir.

199. L'orifice est censé assez petit pour qu'on puisse négliger les vitesses des molécules dans le réservoir. L'écoulement a lieu dans un milieu dont la pression p est constante; l'action de la pesanteur est négligeable devant celle de la différence $p_0 - p$ des pressions dans le réservoir et dans le milieu ambiant.

La formule (A) du n° 180 nous donne, en posant $\rho g = \Pi$,

$$\frac{V}{g}\,dV = -\frac{dp}{\Pi},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{V^2}{2g} = -\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\Pi}.$$

200. *Gaz permanent.* — Comme le gaz n'éprouve ni perte ni gain de chaleur, nous prendrons [1]

$$(2) \qquad \Pi = \Pi_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

γ étant le rapport des chaleurs spécifiques sous pression con-

---

[1] *Voir* notre *Traité de Physique mathématique*, t. II, p. 77.

stante et volume constant, soit $\gamma = 1,419$ pour l'air, et l'équation (1) donnera, par l'élimination de Π,

$$(3) \qquad V = \sqrt{\frac{2p_0}{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Pi_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]},$$

d'où, pour le poids débité par seconde par l'orifice dont A est l'aire,

$$(4) \qquad Q = \mu A V \Pi = \mu A \sqrt{\frac{2g\Pi_0 p_0}{1-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]},$$

μ étant un coefficient de contraction ou de dépense.

Si la différence des pressions $p_0 - p$ est assez petite pour qu'on puisse négliger le carré de $\frac{p_0 - p}{p_0}$, on a

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \left(1+\frac{p-p_0}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 1+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{p-p_0}{p},$$

et les équations (3) et (4) deviennent, en prenant de plus dans la seconde $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} = 1$,

$$(3') \qquad V = \sqrt{\frac{2g(p_0-p)}{\Pi_0}},$$

$$(4') \qquad Q = \mu A \sqrt{2g\Pi_0(p_0-p)}.$$

Les équations (3′) et (4′) sont celles qui se rapportent à un liquide dont le poids spécifique serait Π_0.

Grashof, en partant des résultats des expériences de Wiesbach, a trouvé pour μ les valeurs suivantes :

1° *Ajutages ayant la forme du jet contracté, ayant* 10^{mm} *de longueur.* — On a

$$\mu = 0,981$$

pour une charge $p_0 - p$ correspondant à une colonne de mercure variant entre 180^{mm} et 850^{mm};

2° *Orifices circulaires en mince paroi, de* 10^{mm} *à* 24^{mm} *de diamètre.* — Pour une charge de 50^{mm} à 850^{mm} de mercure, on a

$$\mu = 0,555 \quad \text{à} \quad 0,795.$$

Le coefficient μ augmente ainsi avec la charge.

3° *Ajutages cylindriques très courts, de* 10^{mm} *à* 24^{mm} *de diamètre.* — On a, dans les mêmes limites de charge que ci-dessus,

$$\mu = 0,737 \quad \text{à} \quad 0,839.$$

Ces diverses valeurs de μ diffèrent peu de celles qu'on trouve pour l'écoulement de l'eau, dans les mêmes circonstances, comme l'avaient déjà fait remarquer d'Aubuisson et Poncelet, à la suite de quelques expériences faites dans le cas de faibles charges.

201. *Écoulement de la vapeur d'eau saturée sèche.* — On peut appliquer les formules du numéro précédent en y supposant $\gamma = 1,33$ [1].

202. *Du frottement des gaz dans les tuyaux.* — Soit Π le poids spécifique du gaz dans la section ω dont σ est le périmètre. Le frottement sur la longueur ds de l'axe des tuyaux est représenté par

$$\Pi b \sigma V^2 ds,$$

et, d'après Poncelet, il convient de prendre $b = 0,00315$.

On reconnaît facilement que l'équation (1) du n° 179, après l'avoir différentiée, s'applique ici en introduisant dans le second membre le terme $-\frac{b\sigma V^2}{\omega}$. On a ainsi

$$(4) \qquad \frac{1}{2g} dV^2 = -\frac{1}{\Pi_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dp - b\sigma \frac{V^2}{\omega} ds.$$

---

(1) *Voir* notre *Traité de Physique mathématique*, t. II, p. 88.

De

$$Q = \omega V \Pi = \omega V \Pi_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

on tire

$$V = \frac{Q}{\omega \Pi_0} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

En portant cette valeur dans la formule (4), on aura une équation différentielle en p et s, qui, intégrée, et connaissant les valeurs de p aux extrémités du tuyau, permettra de déterminer Q.

Dans la plupart des cas, comme dans la canalisation du gaz de l'éclairage, le rapport $\frac{p_0 - p}{p_0}$ est assez petit pour qu'on puisse faire l'application des formules établies pour les liquides.

CHAPITRE XVI.

DES PETITS MOUVEMENTS D'UN FLUIDE ÉLASTIQUE.

203. Cette question, qui se rapporte surtout à l'Acoustique, a été introduite depuis Poisson, dans la Mécanique générale; aussi n'en est-il plus fait mention dans les récents Traités de Physique mathématique.

Comme elle s'appuie, en partie, sur l'Hydrodynamique, et sur l'hypothèse des tranches de l'Hydraulique, il était difficile de lui faire une place convenable, et c'est pourquoi nous en avons fait l'objet d'un Chapitre spécial.

Nous admettrons que la vitesse dérive d'un potentiel φ, et qu'elle est assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré; nous ferons abstraction de la pesanteur.

Les équations (7) et (6) du n° **169** donnent

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0, \\ \dfrac{dp}{\rho} = -d\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{cases}$$

D'ailleurs on a (n° **200**)

$$(b)\qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}.$$

Si l'on pose

$$(1)\qquad \rho = \rho_0(1+\zeta),$$

la valeur de la *condensation* ζ sera de l'ordre de grandeur de la vitesse et, en conséquence, on en négligera le carré.

La seconde des équations (a) devient

$$\frac{p_0\gamma}{\rho_0}\,d\zeta = -\,d\,\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

et, en posant

$$a^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0},$$

on obtient

$$(2)\qquad \zeta = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

La première des équations (a) donne d'abord, eu égard à la valeur (1) de ρ,

$$\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0;$$

mais $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, ou simplement $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$, ou encore, vu (2), $\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$; l'équation ci-dessus se réduit donc à la suivante

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

à laquelle on devra chercher à satisfaire dans les différents cas qui pourront se présenter en ayant égard aux conditions imposées.

204. *Du mouvement d'un gaz dans un tuyau.* — On prendra pour Ox l'axe du tuyau et on admettra qu'à chaque instant les molécules qui se trouvent dans une section sont égales et parallèles à Ox.

Comme φ, et par suite ζ, ne dépendront que de x, nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} \zeta = -\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \end{cases}$$

En désignant par A_m, m deux constantes arbitraires, la seconde de ces équations sera satisfaite par une somme de

termes de la forme $A_m \sin m\left(t - \frac{x}{a}\right)$, d'où une série de vibrations qui se superposeront, et il nous suffira de considérer une d'entre elles définie par

$$\varphi = A_m \sin m\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

et pour laquelle nous aurons, en désignant par u la vitesse $\frac{d\varphi}{dx}$,

$$\zeta = -\frac{mA_m}{a^2}\cos m\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

$$u = -\frac{mA_m}{a}\cos m\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

d'où

$$\zeta = \frac{u}{a}.$$

On peut considérer la masse fluide comme étant décomposée en tranches infiniment minces, éprouvant des dilatations et contractions variables avec le temps et leurs positions moyennes, et animées de mouvements oscillatoires.

Si les conditions initiales sont telles que la tranche qui répond à $x = 0$ entre seule en mouvement, on a, pour sa vitesse,

$$u_0 = -\frac{mA_m}{a},$$

et pour la vitesse, au bout du temps t, d'une tranche quelconque,

$$u = u_0 \cos m\left(t - \frac{x}{a}\right);$$

mais la vitesse u_0 ne sera communiquée à cette dernière tranche qu'au bout du temps $t = \frac{x}{a}$; donc le mouvement vibratoire se propagera avec une vitesse constante

$$V = a\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},$$

qui sera, en nous plaçant de l'Acoustique, la vitesse de *propagation du son.*

Pour l'air à la température θ sous la pression moyenne correspondant à la colonne de mercure de $0^m,76$, on a

$$\rho_0 = \frac{1,2932}{9,8088}\,\frac{1}{1+0,00367\theta};$$

d'ailleurs $\gamma = 1,419$, $p_0 = 10333$, par suite

$$V = 333^m,49\sqrt{1+0,00367\theta}.$$

La valeur $333^m,49$ de V pour $\theta = 0$, diffère peu de la moyenne $330^m,70$ des résultats obtenus, par Regnault, en 1866.

La condensation et la vitesse étant les mêmes pour la tranche définie par x, au bout du temps $t + \frac{x}{V}$, et la tranche répondant à $x = 0$ au bout du temps t, les deux mouvements vibratoires sont identiques et il suffit, par conséquent, d'étudier le mouvement de cette dernière dont la vitesse, à un instant quelconque, est

$$u = u_0 \cos mt.$$

L'amplitude d'une vibration complète $\frac{2u_0}{m}$ est ce qu'on appelle la *longueur de l'onde*. L'onde est ainsi composée de *deux demi-ondes*, l'une *condensante* et l'autre dilatante.

Nous allons maintenant examiner les différents cas qui peuvent se présenter dans le mouvement d'un gaz dans un tuyau.

205. *Le tuyau est indéfini.* — Supposons que les conditions initiales soient exprimées par

$$(5) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -a^2 F(x)$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et ∞.

En désignant par ψ et χ deux fonctions arbitraires, l'intégrale générale de la seconde des équations (6) étant

$$\varphi = \psi(x - at) + \chi(x + at),$$

nous aurons

$$\psi'(x) + \chi'(x) = f(x), \qquad \psi'(x) - \chi'(x) = aF(x),$$

d'où $\psi'(x)$, $\chi'(x)$ et

$$u = \frac{f(x-at) + aF(x-at)}{2} + \frac{f(x+at) - aF(x+at)}{2},$$

$$a\zeta = -\frac{f(x-at) + aF(x-at)}{2} + \frac{f(x+at) - aF(x+at)}{2}.$$

206. *Le tuyau est fermé à ses deux extrémités.* — Appelons l la longueur du tuyau et plaçons l'origine à l'une de ses extrémités. Aux conditions (5), qui ne doivent être satisfaites qu'entre $x = 0$ et $x = l$, il faut joindre les suivantes:

$$(6) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = l.$$

Cherchons à satisfaire la seconde des équations (4) en posant $\varphi = TX$, produit dans lequel T, X sont des fonctions respectives de t et de x. En substituant, on trouve la relation

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dt^2},$$

qui exige que chacun de ses membres soit égal à une constante que nous désignons par $-a^2m^2$; on est ainsi ramené à intégrer deux équations différentielles connues; on pourra donc prendre

$$\varphi = (M_m \cos mx + N_m \sin mx)(P_m \sin amt + Q_m \cos amt).$$

On satisfera aux conditions (6), en prenant $N_m = 0$ et $\sin ml = 0$, d'où, en désignant par i un nombre entier quelconque positif,

$$m = \frac{i\pi}{l}.$$

Nous pourrons donc écrire

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l} + B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right),$$

d'où, en remplaçant, après les différentiations, $\frac{A_i i\pi}{l}$, $\frac{B_i i\pi}{l}$ par A_i, B_i,

$$(10) \qquad \begin{cases} u = -\sum_0^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l} + B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right), \\ a\zeta = -\sum_0^{\infty} \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{ai\pi t}{l} - B_i \sin\frac{ai\pi t}{l}\right). \end{cases}$$

Les conditions (5) deviennent

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_0^\infty B_i \sin\frac{i\pi x}{l} = -f(x) \\ \sum_0^\infty A_i \cos\frac{i\pi x}{l} = -aF(x) \end{array}\right\} \text{entre } x = 0 \text{ et } x = l.$$

On déduit de là

$$B_i = -\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx,$$

$$A_i = -\frac{2a}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{i\pi x}{l}\,dx.$$

Si l'on considère, en particulier, le cas où l'état initial est tel que la série se réduise à un seul terme, on a deux équations de la forme

$$u = \sin\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l} + B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right),$$

$$a\zeta = \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{ai\pi t}{l} - B_i \sin\frac{ai\pi t}{l}\right).$$

La durée d'une vibration est $\frac{2l}{ia}$; les points où le gaz est immobile dans le tuyau, ou ce qu'on appelle les *nœuds*, sont donnés par $u = 0$, c'est-à-dire par

$$x = \frac{kl}{i},$$

k étant un nombre entier. Les nœuds divisent ainsi la longueur du tuyau en parties égales.

Les points où la condensation est nulle, appelés *ventres*, sont donnés par

$$\cos\frac{i\pi x}{l} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{2k+1}{2i}\,l.$$

Ils sont donc situés aux milieux des intervalles successifs des nœuds.

207. *Le tuyau est ouvert à ses deux extrémités.* — La condensation étant nulle aux extrémités, on a à exprimer que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } x = 0,\ x = l,$$

conditions auxquelles on satisfera en prenant

$$\varphi = \sum_1^\infty \sin\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l}\ B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right),$$

d'où, en remplaçant, après les différentiations, $\frac{i\pi A_i}{l}$, $\frac{i\pi B_i}{l}$ par A_i, B_i,

$$u = \sum_1^\infty \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l} + B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right.;$$

$$a\zeta = -\sum_1^\infty \sin\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{ai\pi t}{l} - B_i \sin\frac{ai\pi t}{l}\right).$$

Les conditions relatives à l'état initial sont

$$\sum_1^\infty B_i \cos\frac{i\pi x}{l} = f(x),$$

$$\sum_1^\infty A_i \sin\frac{i\pi x}{l} = -aF(x),$$

d'où

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{i\pi x}{l}\,dx,$$

$$A_i = -\frac{2a}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx.$$

On a, pour un mouvement simple,

$$u = \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \sin\frac{ai\pi t}{l} + B_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right),$$

$$a\zeta = \sin\frac{i\pi x}{l}\left(B_i \sin\frac{ai\pi t}{l} - A_i \cos\frac{ai\pi t}{l}\right).$$

La durée d'une vibration est $\frac{2l}{ia}$; les ventres et les nœuds,

en désignant par k un nombre entier, sont respectivement donnés par

$$x = \frac{kl}{i}, \qquad x = \frac{(2k+1)l}{2i},$$

et l'on voit que les ventres sont situés à égale distance des nœuds successifs.

208. *Une des extrémités est ouverte et l'autre est fermée.* — Nous placerons l'origine O dans la section ouverte; nous aurons à satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } x = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{»} \quad x = l,$$

qui seront remplies en posant

$$\varphi = \sum_1^\infty \sin\frac{(2i+1)\pi x}{l}\left[A_i \sin\frac{(2i+1)\pi at}{2l} + B_i \cos\frac{(2i+1)\pi at}{2l}\right].$$

On déterminera les A_i, B_i comme on l'a fait précédemment et on reconnaîtra que dans un mouvement simple un ventre se trouve au milieu de la distance des deux nœuds adjacents.

209. *Des petits mouvements d'un gaz indéfini en tous sens.* — L'équation (3) du n° 203 est satisfaite par

$$\begin{aligned}\varphi = \Sigma\Big[&A_m \sin m\left(t - \frac{x}{a} + \alpha_m\right) + B_m \sin m\left(t - \frac{y}{a} + \beta_m\right)\\ &+ C \sin m\left(t - \frac{z}{a} + \gamma_m\right) + A'_m \sin m\left(t + \frac{x}{a} + \alpha'_m\right)\\ &+ B'_m \sin m\left(t + \frac{y}{a} + \beta'_m\right) + C'_m \sin m\left(t + \frac{z}{a} + \gamma'_m\right)\Big],\end{aligned}$$

expression dans laquelle les A, B, C, α, β, γ sont des constantes arbitraires.

D'après cette forme, on voit que la vitesse de propagation du son dans le sens de chacun des trois axes, dont l'orienta-

tion est arbitraire, est égale à a, que, par suite, elle est constante dans toutes les directions; on remarquera qu'ici les ondes sont sphériques.

On satisfera aux conditions initiales

$$\varphi = F(x, y, z), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x, y, z),$$

en même temps qu'à l'équation (3), en écrivant avec Poisson [1],

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} t\sin\theta\, f\begin{pmatrix} x + at\cos\theta, \\ y + at\sin\theta\cos\varpi, \\ z + at\sin\theta\cos\varpi \end{pmatrix} d\varpi, \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} t\sin\theta\, F\begin{pmatrix} x + at\cos\theta, \\ y + at\sin\theta\cos\varpi, \\ z + at\sin\theta\sin\varpi \end{pmatrix} d\varpi, \end{aligned}\right.$$

formule dans laquelle θ est l'angle que forme avec Ox le rayon vecteur Om, mené de l'origine au point (x, y, z) et ϖ l'angle des plans xOm et xOy.

Si nous désignons par α, β, γ les angles $\widehat{mOx}$, $\widehat{mOy}$, $\widehat{mOz}$, par $d\omega$ l'élément de la sphère dont le rayon est égal à l'unité, l'expression (7) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\int t f(x + at\cos\alpha, y + at\cos\beta, z + at\cos\gamma)\, d\omega \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int t F(x + at\cos\alpha, y + at\cos\beta, z + at\cos\gamma)\, d\omega, \end{aligned}$$

le signe $\int$ s'étendant à la surface entière de la sphère.

---

[1] *Voir* notamment le Tome II des *Leçons d'Analyse* de Duhamel.

APPENDICE.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UNE PLAQUE DONT LES FACES SONT SOUMISES A DES PRESSIONS NORMALES.

I. Une plaque est un prisme ou cylindre dont la hauteur ou *épaisseur* est relativement petite par rapport à ses dimensions transversales. La position d'une plaque sera définie soit par un encastrement suivant le périmètre, soit par l'appui de ce périmètre sur un prisme creux. La plaque sera censée composée de feuillets, comme on l'a dit au n° 153.

Soient

$2\varepsilon = e$ l'épaisseur de la plaque;
xOy son plan moyen;
$P_0 > P_1$ les pressions exercées sur l'une et l'autre face par unité de surface et qui généralement seront des fonctions de x, y;
$P = P_0 - P_1$ la pression effective.

La partie positive de Oz sera dirigée dans le sens de P_0.

On doit avoir

$$(1) \qquad p_{zx} = 0, \quad p_{zy} = 0 \quad \text{pour } z = \pm\varepsilon,$$

avec les équations de l'équilibre intérieur

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right.$$

Différentiant respectivement, par rapport à x, y, la pre-

mière et la seconde des équations (2), puis les ajoutant à la troisième, après les avoir multipliées par z, on trouve

$$\left(\frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial y^2}\right) z + \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = 0.$$

Si nous multiplions cette équation par dz, que nous intégrions ensuite entre les limites $z = \pm \varepsilon$, en remarquant que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz = P_1 - P_0 = -P$, nous obtenons, eu égard à (1),

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial y^2}\right] z dz - P = 0,$$

ce qui revient à

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y^2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2}\right) + 2\mu \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\right] z dz = -P.$$

De $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ on déduit successivement

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 dy} = \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2},$$

et l'équation ci-dessus devient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \int_{-z}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2}\right) z dz \\ &\quad + \lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2}\right) z dz = -P \text{ (1)}. \end{aligned} \right.$$

Pour aller plus loin il faut faire un emprunt aux hypothèses de la résistance des matériaux. En conséquence, on négligera la variation d'épaisseur de la plaque, par suite δz et le carré

(1) Cette formule est due à M. Boussinesq.

des inclinaisons sur le plan xOy des tangentes au feuillet moyen déformé.

Un point quelconque M_0 du feuillet moyen naturel viendra se placer en M sur la parallèle en M_0 à Oz. Concevons qu'on trace la double série des lignes de courbure du feuillet moyen déformé; au degré d'approximation convenu, les projections de ces lignes sur le plan xOy détermineront un réseau orthogonal. On admettra que les lignes matérielles parallèles à Oz menées aux points de la projection d'une ligne de courbure restent normales au feuillet moyen déformé; ces normales détermineront évidemment, dans chaque feuillet, une ligne de courbure.

Soient

m_0 un point de la plaque à l'état naturel défini, $\overline{m_0M_0} = z$;
$\overline{mM}$ la position que prend $\overline{m_0M_0}$ après la déformation;
mx', my' les tangentes aux lignes de courbure passant par m;
$m\chi$ une droite quelconque tracée dans le plan $x'my'$ et α l'angle $\widehat{\chi m x'}$;
R, R' les rayons de courbure des sections principales Mmx', Mmy' du feuillet moyen déformé.

Comme la dilatation du feuillet moyen est nécessairement très petite et négligeable, on posera (n° 148)

$$\delta_{x'} = \frac{z}{R}, \qquad \delta_{y'} = \frac{z}{R'},$$

et (n° 139) on aura

$$\delta_\chi = \delta_{x'} \cos^2\alpha + \delta_{y'} \sin^2\alpha + \gamma_{x'y'} \sin\alpha\cos\alpha.$$

Il est plausible d'admettre $\gamma_{x'y'} = 0$, en raison de la symétrie de la surface du feuillet (z) déformé à une distance infiniment petite de part et d'autre des lignes de courbure. Une autre considération conduit à ce résultat; en effet, le lieu de l'index du rayon qui représente p_x est une ellipse dont les axes doivent naturellement coïncider avec ceux de l'indicatrice, ce qui exige que $p_{x'y'} = \mu\gamma_{x'y'}$ soit nul. On a donc

$$\delta\chi = z\left(\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}\right) = \frac{z}{\rho},$$

en désignant par ρ le rayon de courbure de la section normale au feuillet moyen, menée suivant $m\chi$. On pourra maintenant substituer à $m\chi$ la parallèle en m_0 à sa projection sur xOy.

Désignons par w_0 l'ordonnée $\overline{MM_0}$ du feuillet déformé. Comme $\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ vont en décroissant quand x, y croissent, nous aurons

$$(4) \qquad \delta_x = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \qquad \delta_y = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2},$$

et, si l'on se rappelle que δ_z doit être négligé, en effectuant l'intégration, l'équation (3) se réduit à

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \frac{3P}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)},$$

ou

$$(A) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) = \frac{3P}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)}.$$

D'après une propriété connue, le premier membre de l'équation (A), comme cela devait être, est indépendant de l'orientation du système d'axes Ox, Oy.

On a enfin

$$(B) \quad \begin{cases} p_{xx} = z\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right], \\ p_{yy} = z\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]. \end{cases}$$

II. Comme première application de l'équation (A), nous reprendrons la question d'une plaque élastique circulaire soumise aux pressions constantes P_0, P_1, qui a été traitée d'une autre manière au n° 153.

En prenant pour origine le centre O de la plaque et posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

l'ordonnée w_0 dépendra uniquement de r. On a

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \qquad dy \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta,$$

d'où

$$dr = \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy, \qquad r\, d\theta = -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy.$$

Pour une fonction $f(r)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cos\theta, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{df}{dr}\sin\theta,$$

puis

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 f}{dr^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - \dfrac{df}{dr}\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{d^2 f}{dr^2}\cos^2\theta + \dfrac{df}{dr}\dfrac{\sin^2\theta}{r}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 f}{dr^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\theta + \dfrac{df}{dr}\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{d^2 f}{dr^2}\sin^2\theta + \dfrac{df}{dr}\dfrac{\cos^2\theta}{r}, \end{cases}$$

d'où

$$(b)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right).$$

En supposant $f = w_0$, on trouve

$$(c)\qquad \frac{\partial^2 w_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right).$$

En faisant ensuite f égal à cette dernière expression et se reportant à la formule (A), on trouve

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)}.$$

Deux intégrations successives donnent, en désignant par C et C′ deux constantes,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right) = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{r^2}{4} + \mathrm{C}\log r + \mathrm{C}'\right);$$

mais comme, vu (c), le premier membre de cette dernière équation n'est autre chose que la somme des courbures principales qui ne peut pas devenir infinie pour $r = 0$, il faut que $\mathrm{C} = 0$. En intégrant de nouveau et remarquant que $\frac{dw_0}{dr} = 0$, pour $r = 0$, on obtient

$$\frac{dw_0}{dr} = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{r^2}{16} + \frac{\mathrm{C}'r}{2}\right),$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (7) du n° 153, sur laquelle nous n'avons pas à revenir.

III. *Plaque rectangulaire reposant sur un châssis de même forme.* — Soient O l'un des sommets du rectangle pris pour origine des coordonnées; Ox, Oy les directions des côtés partant de O, dont a, b désignent les longueurs.

On doit avoir

$$w_0 = 0, \qquad p_{yy} = 0 \qquad \text{pour} \begin{cases} y = 0, & x \gtreqless 0, \\ y = b, & x \lesseqgtr a, \end{cases}$$

$$w_0 = 0, \qquad p_{xx} = 0 \qquad \text{pour} \begin{cases} x = 0, & y \gtreqless 0, \\ x = a, & x \lesseqgtr a. \end{cases}$$

On satisfera à ces conditions, vu (B), par

$$(1) \qquad w_0 = \Sigma A_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b},$$

m, n étant deux nombres entiers positifs quelconques et $A_{m,n}$ une constante arbitraire.

En substituant la valeur (1) dans l'équation (A), on trouve

$$\Sigma A_{m,n}(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} = \frac{3a^4 b^4 P}{2\varepsilon^3(\lambda + 2\mu)\pi^4}.$$

Multiplions par $\sin \frac{n\pi y}{b}\, dy$ et intégrons entre $y = 0$, $y = b$, nous obtenons

$$\Sigma A_{m,n}(m^2 b^2 + n^2 a^2) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{3a^4 b^3}{\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)\pi^4} \int_0^P P \sin \frac{n\pi\beta}{b}\, dy.$$

En multipliant de même par $\sin \frac{m\pi x}{a}\, dx$ et intégrant entre $x = 0$, $x = a$, on trouve

$$A_{m,n}(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2 = \frac{6a^3 b^3}{\varepsilon^2(\lambda + 2\mu)\pi^4} \int_0^a d\alpha \int_0^b \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}\, d\beta,$$

d'où $A_{m,n}$ et la solution du problème.

Nous supposerons dans ce qui suit $\mu = \lambda$ et nous substituerons à λ le coefficient d'élasticité $E = \frac{5}{2}\lambda$; nous aurons

$$(2) \quad A_{m,n}(m^2 b^2 + n^2 a^2) = \frac{5a^3 b^3}{E\varepsilon^3 \pi^4} \int_0^a d\alpha \int_0^b P \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}\, d\beta.$$

Nous allons maintenant considérer quelques cas particuliers.

1° *La pression effective* P *est constante.* — On a

$$A_{m,n} = \frac{5a^4b^4P}{E\varepsilon^2\pi^6 mn(mb^2+na^2)^2}(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi).$$

Comme ce coefficient est nul lorsque m et n sont des nombres pairs, nous prendrons $m = 2m'+1$, $n = 2n'+1$, en désignant par m', n' deux nombres entiers positifs quelconques. Si nous posons $k = \frac{b}{a} \geqq 1$, nous aurons

$$(3)\quad A_{m,n} = \frac{20b^4P}{E\varepsilon^2\pi^6(2m'+1)(2n'+1)[(2m'+1)^2k^2+(2n'+1)^2]^2}$$

et

$$(4)\qquad w_0 = \Sigma A_{m'n'}\sin(2m'+1)\pi\frac{x}{a}\sin(2n'+1)\pi\frac{y}{b}.$$

La flèche ou la valeur de w_0 pour le milieu de la plaque répondant à $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ sera

$$(5)\quad \begin{cases} f = \Sigma A_{m'n'}(-1)^{m'}(-1)^{n'} \\ \quad = \dfrac{20b^4P}{E\varepsilon^2\pi^6}\left[\dfrac{1}{(k^2+1)^2} - \dfrac{1}{3(9k^2+1)^2} - \dfrac{1}{3(k^2+9)^2} + \dfrac{1}{9^3(k^2+1)^2} - \ldots\right]. \end{cases}$$

Plaçons-nous maintenant au point de vue de la résistance de la plaque. Pour des valeurs données de x, y les plus grandes valeurs absolues des dilatations répondront à $z = \pm\varepsilon$ et seront

$$\delta_x = \pm\frac{20b^4P}{a^2E\varepsilon^2\pi^4}\sum\frac{(2m'+1)}{(2n'+1)[k^2(2m'+1)^2+(2n'+1)^2]^2} \times \sin(2m'+1)\pi\frac{x}{a}\sin(2n'+1)\pi\frac{y}{b},$$

$$\delta_y = \pm\frac{20b^2P}{E\varepsilon^2\pi^4}\sum\frac{(2n'+1)}{(2m'+1)[k^2(2m'+1)^2+(2n'+1)^2]^2} \times \sin(2m'+1)\pi\frac{x}{a}\sin(2n'+1)\pi\frac{y}{b}.$$

Les équations $\frac{\partial \delta_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \delta_y}{\partial y} = 0$ sont satisfaites par $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, et l'on a, pour les plus grandes dilatations,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta_x &= \frac{20 b^4 P}{a^2 E \varepsilon^2 \pi^4} \sum \frac{(-1)^{m'}(-1)^{n'}(2m'+1)}{(2n'+1)\left[k^2(2m'+1)^2+(2n'+1)^2\right]^2} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(k^2+1)^2} - \frac{3}{(9k^2+1)^2} - \frac{1}{3(k^2+9)^2} + \frac{1}{92}\,\frac{1}{(k^2+1)^2}\right], \\ \delta_y &= \frac{a^2}{b^2}\,\delta_x. \end{aligned}\right.$$

Si la plaque est carrée, on obtient

$$(a)\qquad f = \frac{20 a^4 P}{E \varepsilon^2 \pi^6} \times 0{,}244, \qquad \delta_x = \delta_y = \frac{20 a^2 P}{E \varepsilon^3 \pi^6} \times 0{,}220.$$

Si l'on pose $E\delta_x = \Gamma$, on a, pour l'épaisseur $e = 2\varepsilon$,

$$(b)\qquad e = 0{,}425\, a \sqrt{\frac{P}{\Gamma}}.$$

2° *Une charge est concentrée en un point de la plaque.* — Supposons que $P_1 = 0$, que la pression constante $P_0 = P$ s'exerce uniquement sur un rectangle défini par x', y', $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$ et que $\Delta x'$, $\Delta y'$ soient assez petites pour qu'on puisse les considérer comme différentielles. De ce que la pression est nulle en dehors du rectangle $\Delta x' \Delta y'$, la formule (2) devra être remplacée par la suivante

$$\begin{aligned} A_{m,n}(mb^2 + na^2)^2 &= \frac{5 a^3 b^3 P}{E \varepsilon^3 \pi^4} \int_{x'}^{x'+\Delta x'} d\alpha \int_{y'}^{y'+\Delta y'} \sin \pi \frac{\alpha}{a} \sin \pi \frac{\beta}{b}\, d\beta \\ &= \frac{5 a^3 b^3 P}{E \varepsilon^3 \pi^4} \sin m \frac{x'}{a} \sin n \frac{y'}{b}\, \Delta x' \Delta y', \end{aligned}$$

ou, en désignant par Q la charge $P.\Delta x' \Delta y'$ concentrée au point (x', y'),

$$A_{m,n}(mb^2 + na^2)^2 = \frac{5 a^3 b^3 Q}{E \varepsilon^3 \pi^4} \sin m\pi \frac{x'}{a} \sin n\pi \frac{y'}{b}.$$

Admettons maintenant que la charge repose au centre de

la plaque, nous avons

$$A_{m,n} = \frac{5a^3b^3Q}{E\varepsilon^3\pi^4(m^2b^2+n^2a^2)^2}\sin m\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{2};$$

comme ce coefficient est nul lorsque m et n sont pairs, nous poserons $m = 2m'+1$, $n = 2n'+1$, et nous aurons

$$(3') \qquad A_{m',n'} = \frac{5a^3b^3Q(-1)^{m'}(-1)^{n'}}{E\varepsilon^3\pi^2[(2m'+1)^2b^2+(2n'+1)^2a^2]^2}.$$

La formule (4), qui s'applique ici, nous donne, pour la flèche,

$$(5') \quad f = \frac{5b^3Q}{aE\varepsilon^3\pi^4}\left[\frac{1}{(k^2+1)^2}+\frac{1}{(9k^2+1)}+\frac{1}{(k^2+9)^2}+\frac{1}{9^2(k^2+1)^2}+\ldots\right],$$

et nous avons, pour $z = \varepsilon$, $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$,

$$(6') \quad \begin{cases} \delta_x = \dfrac{5b^3Q}{a^3E\varepsilon^2\pi^2}\left[\dfrac{1}{(k^2+1)^2}+\dfrac{9}{(9k^2+1)^2}+\dfrac{1}{(k^2+9)^2}+\dfrac{1}{9(k^2+1)^2}+\ldots\right], \\ \delta_y = \dfrac{a^2}{b^2}\delta_x. \end{cases}$$

Si la plaque est carrée, on a

$$(a') \qquad f = \frac{5a^2Q}{E\varepsilon^3\pi^4}0,273,$$

$$\delta_x = \delta_y = \frac{5Q}{E\varepsilon^2\pi^2}0,310,$$

et enfin

$$(b') \qquad e = 2\varepsilon = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\Gamma}}\times 1,55 = 0,7926\sqrt{\frac{Q}{\Gamma}}.$$

Si la charge Q était supportée par toute la plaque carrée, la formule (b) donnerait, en y faisant $P = \frac{a^2}{Q}$,

$$(b'') \qquad e = 0,425\sqrt{\frac{Q}{\Gamma}}.$$

Le rapport de l'épaisseur (b') à l'épaisseur (b'') est environ 1,86.

III. Considérons une porte d'écluse comme formée d'une plaque appuyée contre son châssis dans le bief d'amont censé rempli, tandis que le bief d'aval est vide. En dirigeant Ox dans le sens de la pesanteur et désignant par Π le poids du mètre cube d'eau, on fera $P = \Pi\alpha$ dans la formule (2) et la solution du problème ne présentera aucune difficulté.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

21763 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.